

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 02 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (3,0 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{x - y} - \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$, với $y > x > 0$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Biết $(x-1)(y-1) + 2\sqrt{xy} = 1$. Tính giá trị biểu thức P.

Câu 2 (3,0 điểm) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = 3 - 4m \\ mx + y = 3m + 2 \end{cases}$ (m là tham số)

Chứng minh rằng hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ với mọi giá trị của m và $x_0^2 + y_0^2 - 6(x_0 + y_0) + 17 = 0$

Câu 3 (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 + x - 2x\sqrt{2x+3} + 14 = 4\sqrt{7-x}$

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2 - (m^2 + 2m - 1)x + (m+1)^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2 + 2 = 0$

Câu 4 (2,0 điểm) Phòng giáo dục & đào tạo huyện A chọn một nhóm gồm học sinh cấp Tiểu học và học sinh cấp Trung học cơ sở để tham gia Kỳ thi Violympic cấp Tỉnh. Ban đầu, Phòng giáo dục và đào tạo huyện A dự kiến chọn 60 % sinh Tiểu học trong nhóm học sinh dự thi. Do đơn vị tổ chức không đủ máy tính nên Phòng giáo dục và đào tạo huyện A phải giảm số học sinh đi thi mỗi cấp là 30. Vì vậy số học sinh Tiểu học được chọn chiếm 62% trong nhóm học sinh dự thi. Hỏi trong nhóm học sinh thi theo thực tế có bao nhiêu học sinh của mỗi cấp học?

Câu 5 (2,0 điểm)

Anh Bình cần rút tiền trong thẻ ATM để chi tiêu cá nhân nhưng lại quên mật khẩu đăng nhập tài khoản. Biết rằng mật khẩu là một số chính phương A có bốn chữ số, nếu bớt đi mỗi chữ số của số A một đơn vị thì được số mới là số chính phương có bốn chữ số. Em hãy giúp anh Bình tìm lại mật khẩu đã quên.

Câu 6 (4,0 điểm)

Cho hai đường tròn (O, R) và (O, R') với $R > R'$ cắt nhau tại hai điểm A và B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C. Qua điểm C kẻ các tiếp tuyến CD, CE với đường

tròn (O), trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn (O'). Các đường thẳng DA, AE cắt đường tròn (O') lần lượt tại M và N (M và N khác A). Tia DE cắt đoạn thẳng MN tại I. Chứng minh:

- a) Các điểm B, N, I, E cùng nằm trên một đường tròn.
- b) $AE \cdot MB = AB \cdot MI$
- c) Đường thẳng O'I vuông góc với đường thẳng MN.

Câu 7 (2,0 điểm) Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a+b=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 b^2 (a^2 + b^2)$.

-----HẾT-----

Ghi chú: - *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay*
 - *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm*

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ CẦN THƠ**

**KÌ THI HỌC SINH GIỎI CẤP
THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2024-2025**

MÔN: TOÁN

ĐÁP ÁN THAM KHẢO
(Fanpage: Khu vườn trên máy AIB)

Thời gian làm bài : 150 phút, không kể
thời gian phát đề

Câu 1 (3,0 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{x - y} - \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$, với $y > x > 0$

- a) Rút gọn biểu thức P.
b) Biết $(x-1)(y-1) + 2\sqrt{xy} = 1$. Tính giá trị biểu thức P.

LỜI GIẢI

a)

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} - \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y} - x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + y(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})}$$

$$\text{b) } (x-1)(y-1) + 2\sqrt{xy} = 1 \Leftrightarrow xy - (x - 2\sqrt{xy} + y) = 0 \Leftrightarrow xy = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$\text{Vì } y > x > 0 \text{ nên } xy > 0. \text{ Suy ra } \sqrt{xy} = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{y} - \sqrt{x} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = -1$$

Câu 2 (3,0 điểm) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = 3 - 4m \\ mx + y = 3m + 2 \end{cases}$ (m là tham số)

Chúng minh rằng hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ với mọi giá trị của m và $x_0^2 + y_0^2 - 6(x_0 + y_0) + 17 = 0$

LỜI GIẢI

- Xét $m = 0$, ta có $x = 3$; $y = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán
- Xét $m \neq 0$. Do $\frac{1}{m} \neq -m$ nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$\text{Khi đó: } x \neq 3, y \neq 4, y \neq 2 \text{ và } (1) \Rightarrow m = \frac{x-3}{y-4}; (2) \Rightarrow m = \frac{2-y}{x-3}$$

Suy ra $\frac{x-3}{y-4} = \frac{2-y}{x-3} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = -y^2 + 6y - 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6(x+y) + 17 = 0 (dpcm)$

Câu 3 (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 + x - 2x\sqrt{2x+3} + 14 = 4\sqrt{7-x}$

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2 - (m^2 + 2m - 1)x + (m+1)^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2 + 2 = 0$

LỜI GIẢI

a) Với điều kiện $\frac{-3}{2} \leq x \leq 7$, phương trình đã cho tương đương với:

$$x^2 - 2x\sqrt{2x+3} + 2x + 3 + 7 - x - 4\sqrt{7-x} + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2\sqrt{2x+3})^2 + (\sqrt{7-x} - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2\sqrt{2x+3})^2 = 0 \\ (\sqrt{7-x} - 2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3 (t/m)$$

Vậy $x = 3$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Phương trình đã cho tương đương với: $x^2 + (1 - 2m - m^2)x + m^2 + 2m - 2 = 0$

Với các hệ số $a = 1$; $b = 12m - m^2$; $c = m^2 + 2m - 2$

Ta có nhận xét: $1 + 12m - m^2 + m^2 + 2m - 2 = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$ và $x = m^2 + 2m - 2$

Theo giả thiết, $x_1^2 + x_2 + 2 = 0 (*)$ ta xét các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** $x_1 = m^2 + 2m - 2$; $x_2 = 1$

$(*) \Leftrightarrow (m^2 + 2m - 2)^2 + 3 = 0$ (vô lí vì $(m^2 + 2m - 2)^2 + 3 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$)

- **Trường hợp 2:** $x_1 = 1$; $x_2 = m^2 + 2m - 2$

$(*) \Leftrightarrow 1 + m^2 + 2m - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Câu 4 (2,0 điểm)

Phòng giáo dục & đào tạo huyện A chọn một nhóm gồm học sinh cấp Tiểu học và học sinh cấp Trung học cơ sở để tham gia Kỳ thi Violympic cấp Tỉnh. Ban đầu, Phòng giáo dục và đào tạo huyện A dự kiến chọn 60 % học sinh Tiểu học trong nhóm học sinh dự thi. Do đơn vị tổ chức không đủ máy tính nên Phòng giáo dục và đào tạo huyện A phải giảm số học sinh đi thi mỗi cấp là 30. Vì vậy số học sinh Tiểu học được chọn chiếm 62% trong nhóm học sinh dự thi. Hỏi trong nhóm học sinh thi theo thực tế có bao nhiêu học sinh của mỗi cấp học?

LỜI GIẢI

Gọi x, y (học sinh) lần lượt là số học sinh Tiểu học và Trung học cơ sở để tham gia Kỳ thi Violympic cấp Tỉnh của huyện A ($(x \geq 0, y \geq 0)$)

Vì ban đầu Phòng giáo dục và đào tạo huyện A dự kiến chọn 60% học sinh Tiểu học trong nhóm học sinh dự thi nên ta có phương trình:

$$x = 60\% (x+y) \Leftrightarrow 0,4x - 0,6y = 0 \quad (1)$$

Vì sau khi giảm số học sinh đi thi mỗi cấp đi 30, số học sinh Tiểu học chiếm 62% nên ta có phương trình:

$$x - 30 = 62\% (x+y-60) \Leftrightarrow 0,38x - 0,62y = \frac{-36}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 0,4x - 0,6y = 0 \\ 0,38x - 0,62y = \frac{-36}{5} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} x = 216 \\ y = 144 \end{cases}^{9(t/m)}$$

Vậy số học sinh Tiểu học và Trung học cơ sở để tham gia Kỳ thi Violympic cấp Tỉnh của huyện A là 216 và 144

Câu 5 (2,0 điểm)

Anh Bình cần rút tiền trong thẻ ATM để chi tiêu cá nhân nhưng lại quên mật khẩu đăng nhập tài khoản. Biết rằng mật khẩu là một số chính phương A có bốn chữ số, nếu bớt đi mỗi chữ số của số A một đơn vị thì được số mới là số chính phương có bốn chữ số. Em hãy giúp anh Bình tìm lại mật khẩu đã quên.

LỜI GIẢI

Gọi mật khẩu đăng nhập của anh Bình là $\overline{abcd}$ ($a, b, c, d \in N^*$ và $a, b, c, d \leq 9$ và $a \geq 2$)

Theo đề bài ta có: $\overline{abcd} = x^2$ và $\overline{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)} = y^2$

Do đó:
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 1111 (x, y \in N^*; 32 \leq x, y \leq 99) \\ \Leftrightarrow (x-y)(x+y) &= 1.1111 = 11.101 \end{aligned}$$

Vì $32 \leq x, y \leq 99$ nên $x+y \neq 1111$ và $x+y \neq 1$

Vậy nên không xảy ra các trường hợp $\begin{cases} x+y=1111 \\ x-y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1111 \end{cases}$

Mặt khác: $x+y > x-y$ (do x, y là các số nguyên dương) nên chỉ xảy ra trường hợp :

$$\begin{cases} x+y=101 \\ x-y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=56 \\ y=45 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

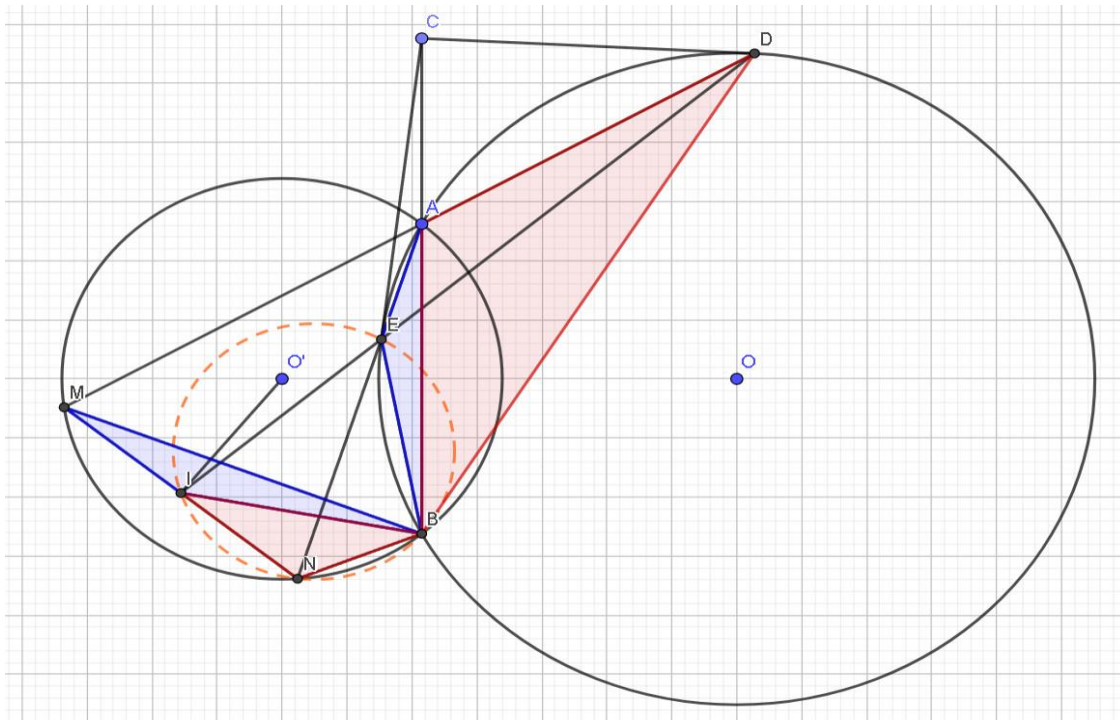
Vậy: mật khẩu đăng nhập của anh Bình là $56^2 = 3136$

Câu 6 (4,0 điểm)

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ với $R > R'$ cắt nhau tại hai điểm A và B . Trên tia đối của tia AB lấy điểm C . Qua điểm C kẻ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn (O) , trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn (O') . Các đường thẳng DA, AE cắt đường tròn (O') lần lượt tại M và N (M và N khác A). Tia DE cắt đoạn thẳng MN tại I . Chứng minh:

- Các điểm B, N, I, E cùng nằm trên một đường tròn
- $AE \cdot MB = AB \cdot MI$
- Đường thẳng $O'I$ vuông góc với đường thẳng MN .

LỜI GIẢI



- Chứng minh: Các điểm B, N, I, E cùng nằm trên một đường tròn

Ta có: $\angle BNI = \angle DAB$ (góc ngoài tứ giác nội tiếp)

Mà $\angle DAB = \angle DEB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

Do đó các điểm B, N, I, E cùng nằm trên một đường tròn

- Chứng minh: $AE \cdot MB = AB \cdot MI$

Xét $\triangle MIB$ và $\triangle AEB$

$\angle BAE = \angle BMI$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BN)

Mặt khác $\angle BEN = \angle BIN$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BN)

$$\Rightarrow AEB = BIN \Rightarrow \triangle MIB \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{MI}{AE} = \frac{MB}{AB} \Leftrightarrow AE \cdot MB = MI \cdot AB (dpcm)$$

c) Đường thẳng O'I vuông góc với đường thẳng MN.

$$\text{Ta có } \triangle MIB \sim \triangle AEB (cmt) \Rightarrow \frac{MI}{AE} = \frac{IB}{EB} \Leftrightarrow IM = \frac{AE}{EB} \cdot BI (1)$$

Mặt khác, xét $\triangle DAB$ và $\triangle INB$ có

$$BNI = DAB \text{ (góc ngoài tứ giác nội tiếp)}$$

$$BDA = BEN = BIN \Rightarrow \triangle DAB \sim \triangle INB \Rightarrow \frac{IN}{AD} = \frac{IB}{DB} \Leftrightarrow IN = \frac{AD}{DB} \cdot IB (2)$$

Xét $\triangle ACE$ và $\triangle ECB$ có

$$AEC = CBE \text{ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)}$$

BCE chung

$$\Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle ECB \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{AE}{EB} (3)$$

$$\text{Tương tự } \Rightarrow \triangle DCA \sim \triangle BCD \Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{AD}{DB} (4)$$

$$\text{Từ (3), (4)} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB} \text{ (CE=CD tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) (5)}$$

$$\text{Từ (1), (2), (5)} \Rightarrow IM = IN \Rightarrow O'I \perp MN (dpcm)$$

Nhận xét: Tứ giác $AEBD$ được gọi là tứ giác điều hòa và tỉ lệ $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB}$ chính là một

tính chất của tứ giác điều hòa mà các em sẽ được học ở chương trình chuyên.

Câu 7 (2,0 điểm) Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a+b=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2b^2(a^2+b^2)$.

LỜI GIẢI

Cách 1: Nguyễn Thế Khang

$$\text{Ta có: } 2 = a+b \geq \sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 1$$

$$\text{Lại có } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 4 - 2ab$$

$$\text{Mà } P = a^2b^2(a^2+b^2) = \frac{a^2b^2(4-2ab)}{1} \leq \frac{a^2b^2(4-2ab)}{ab} = 4ab - 2a^2b^2$$

$$\text{Đặt } ab = t (0 < t \leq 1) \Rightarrow 2 - t > 0$$

$$\text{Khi đó } P = 4t - 2t^2 = 2t(2-t) \leq 2 \cdot \frac{(t+2-t)^2}{4} = 2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $t=1$

Vậy $\max P=2$, đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} ab=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$

Cách 2: Lê Hoàng Thiên Khôi

Ta có: $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Do đó $P \leq ab(a^2 + b^2)$ hay $2P \leq ab(a^2 + b^2) \leq \frac{(a^2 + 2ab + b^2)^2}{4} = \frac{(a+b)^4}{4} = 4$

Vậy $2P \leq 4 \Leftrightarrow P \leq 2$, dấu “=” xảy ra khi $a=b=1$

-----**HẾT**-----