

ĐÁP ÁN: MÔN TOÁN- NGÀY 1

Bài 1. (5.0 điểm)

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 < 2; u_2 < 2$ và $u_{n+2} = \frac{1}{7}(u_{n+1} + 3^{u_n} + 3), \forall n \geq 1$.

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Đặt $a_1 = \max\{1, u_1, u_2\}; b_1 = \min\{1, u_1, u_2\}$

Dãy $a_{n+1} = \frac{1}{7}(a_n + 3^{a_n} + 3); b_{n+1} = \frac{1}{7}(b_n + 3^{b_n} + 3)$

Ta có $3^x \geq 6x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases}; 3^x \leq 6x - 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$

Theo cách đặt ta chứng minh được bằng quy nạp dãy (a_n) giảm và dãy (b_n) tăng thỏa mãn $1 \leq a_n \leq a_{n-1} < 2 \forall n \geq 2$ và $1 \geq b_n \geq b_{n-1} \forall n \geq 2$.

Từ đó suy ra $\lim a_n = \lim b_n = 1$

Bằng quy nạp chứng minh được $b_n \leq u_{2n}, u_{2n+1} \leq a_n$ suy ra dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn $\lim u_n = 1$.

Bài 2. (5.0 điểm)

Cho A là một tập con của tập số thực $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $A \cap (0,1) \neq \emptyset$

ii) Nếu $x \in A$ và $y \in A$ thì $y - x$ và xy là những phần tử thuộc A .

Chứng minh rằng với mọi số thực m và mọi phần tử $x \in A$ thì luôn tồn tại $y \in A$ để

$$|x - y| < \frac{1}{2024^m}.$$

Lấy x là một phần tử bất kì của A , theo điều kiện ii) thì $0 = x - x$ thuộc A

do đó $-x = 0 - x$ là một phần tử A .

Suy ra $2x = x - (-x)$ thuộc A , bằng quy nạp ta có:

nếu x là một phần tử của A thì kx cũng là một phần tử của A trong đó $k \in \mathbb{Z}$.

Cũng từ ii) ta có được kết quả nếu x là một phần tử của A thì x^k cũng là một phần tử của A với $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn $a \in A \cap (0,1)$, khi đó với k đủ lớn thì $0 < a^k < \varepsilon = \frac{1}{2024^m}$.

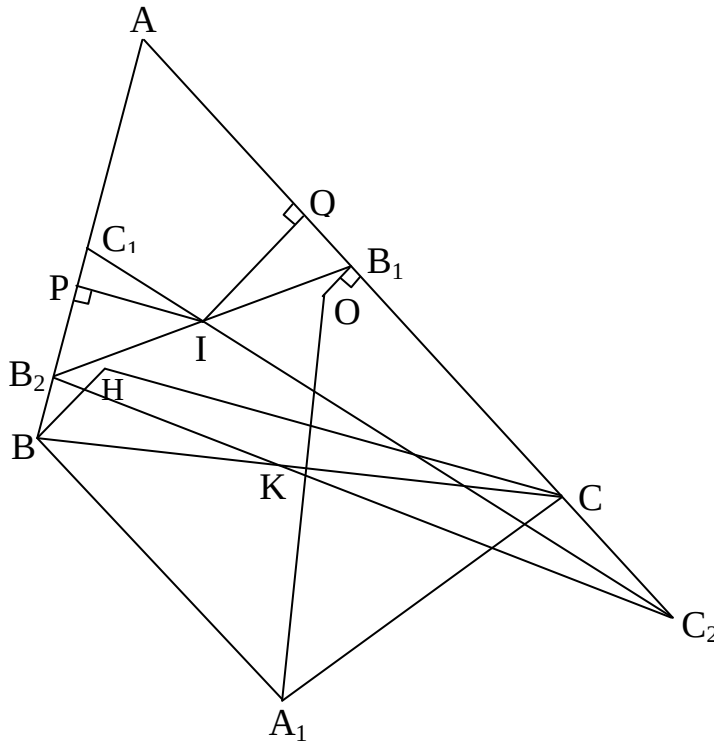
Gọi $x \in A$, đặt $b = \left[\frac{x}{a^k} \right]$ thì

$$b \leq \frac{x}{a^k} < b+1 \Leftrightarrow 0 \leq x - ba^k < a^k.$$

Theo nhận xét trên thì $ba^k \in A$, suy ra tồn tại số y thuộc A mà: $|x - y| < \varepsilon$

Bài 3. (5.0 điểm)

Gọi I, H lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và trực tâm của tam giác nhọn ABC ; các điểm B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB . Biết rằng tia B_1I cắt cạnh AB tại B_2 khác B và tia C_1I cắt tia đối của tia CA tại C_2 khác C . Đường thẳng B_2C_2 cắt BC tại K . Gọi A_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC . Chứng minh rằng ba điểm A, I, A_1 thẳng hàng khi và chỉ khi tam giác BKB_2 và tam giác CKC_2 có diện tích bằng nhau.



Ta chứng minh các điểm A, I, A_1 thẳng hàng khi và chỉ khi $\angle BAC = 60^\circ$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Ta có: $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$; $\angle BA_1C = 2(180^\circ - \angle BHC) = 2\angle BAC$

Do đó $\angle BAC = 60^\circ \Leftrightarrow \angle BAC + \angle BA_1C = 180^\circ$

$\Leftrightarrow A_1$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Khi đó theo tính chất của đường nối tâm thì OA_1 vuông góc với BC và do đó A_1 là điểm chính giữa của cung nhỏ BC nên A, I, A_1 thẳng hàng.

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh rằng $S_{BKB_2} = S_{CKC_2} \Leftrightarrow \angle BAC = 60^\circ$

Kẻ IP vuông góc với AB tại P , IQ vuông góc với AC tại Q .

Khi đó:

$$S_{AB_1B_2} = \frac{1}{2} IP \cdot AB_2 + \frac{1}{2} IQ \cdot AB_1 = \frac{1}{2} AB_1 \cdot AB_2 \sin A$$

$$\Leftrightarrow IP \cdot AB_2 + IQ \cdot AB_1 = AB_1 \cdot AB_2 \sin A$$

$$\text{Đặt } IP = IQ = r; BC = a, AC = b, AB = c \Rightarrow r = \frac{2S_{ABC}}{a + b + c}$$

$$\text{Do } AB_1 = \frac{b}{2}; AB_1 \cdot \sin A = \frac{S_{ABC}}{c}$$

$$\Rightarrow AB_2 \cdot \left(\frac{S_{ABC}}{c} - \frac{2S_{ABC}}{a + b + c} \right) = \frac{b \cdot S_{ABC}}{a + b + c} \Rightarrow AB_2 = \frac{bc}{a + b - c}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } AC_2 = \frac{bc}{a + c - b}$$

$$\text{N như vậy: } S_{BKB_2} = S_{CKC_2} \Leftrightarrow S_{ABC} = S_{AB_2C_2} \Leftrightarrow bc = \frac{bc}{a + b - c} \cdot \frac{bc}{a + c - b}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow \cos BAC = \frac{1}{2} \Leftrightarrow BAC = 60^\circ \text{ (vì tam giác ABC nhọn).}$$

Bài 4.

Cho 45 điểm phân biệt nằm trong hình tròn bán kính $\sqrt{3}$. Tô màu đỏ tất cả các đoạn thẳng nối 2 điểm trong 45 điểm đó có khoảng cách không vượt quá $\sqrt{3}$.

- Giả sử tất cả các đoạn thẳng tạo thành đều được tô màu đỏ. Chứng minh rằng có thể phủ tất cả các đoạn thẳng đó bởi 1 hình tròn có bán kính bằng 1.
- Hỏi có ít nhất bao nhiêu đoạn thẳng màu đỏ? Vì sao?

Định lý Kelli: Trong mặt phẳng cho n hình tròn ($n \geq 4$) thỏa mãn 3 hình tròn bất kì đều có điểm chung thì tất cả n hình tròn đó có điểm chung.

Xét 45 hình tròn có tâm là 45 điểm đã cho và bán kính bằng 1. Ta sẽ chứng minh 3 hình tròn bất kì trong 45 hình đó có điểm chung. Gọi M_1, M_2, M_3 là tâm của 3 hình tròn đó.

- TH1: M_1, M_2, M_3 thẳng hàng. Giả sử M_2 nằm giữa M_1 và M_3 . Khi đó gọi M là trung điểm của M_1M_3 thì M là điểm chung của 3 hình tròn

$$(M_1; 1); (M_2; 1); (M_3; 1) \text{ vì } M_1M = M_3M = \frac{M_1M_3}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \text{ và giả sử } M_2 \text{ thuộc}$$

$$\text{đoạn } M_1M \text{ thì } M_2M < M_1M \leq 1.$$

- TH2: M_1, M_2, M_3 lập thành tam giác nhọn. Xét đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác $M_1M_2M_3$. Khi đó tâm O nằm ở miền trong tam giác $M_1M_2M_3$. Vì $M_1OM_2 + M_2OM_3 + M_1OM_3 = 360^\circ$ nên có ít nhất một trong 3 góc $M_1OM_2; M_2OM_3; M_1OM_3$ không nhỏ hơn 120° . Giả sử $M_1OM_3 \geq 120^\circ \Rightarrow R = OM_1 \leq \frac{M_1M_3}{2 \sin 60^\circ} \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$. Từ đó suy ra O là điểm chung của 3 hình tròn $(M_1; 1); (M_2; 1); (M_3; 1)$.

- TH3: Tam giác $M_1M_2M_3$ không nhọn. Giả sử $M_1 \geq 90^\circ$. Khi đó đường tròn đường kính M_2M_3 chứa M_1 . Gọi M là trung điểm của M_2M_3 .

Ta có $MM_1 \leq MM_2 = MM_3 = \frac{M_2 M_3}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ nên M là điểm chung của 3 hình tròn $(M_1; 1); (M_2; 1); (M_3; 1)$.

Như vậy mọi trường hợp thì 3 hình tròn bất kì đều có điểm chung nên theo **Định lý Kelli** thì 45 hình tròn đó có điểm chung là I . Khi đó hình tròn $(I; 1)$ sẽ phủ hết tất cả các đoạn thẳng màu đỏ.

a) **Định lý Turan:** Cho đồ thị có n đỉnh và không chứa K_m thì số cạnh không vượt quá $\frac{m-1}{m-2} \cdot \frac{n^2}{2}$.

Xét đồ thị có 45 đỉnh là các điểm đã cho và cạnh là những đoạn nối hai điểm có khoảng cách lớn hơn $\sqrt{3}$.

Trước hết ta chứng minh Đồ thị cho không chứa K_6 . Thật vậy, gọi O là tâm của hình tròn và 6 đỉnh bất kì là $A_1, A_2, \dots, A_6$.

Nếu trong 6 đỉnh đó có 1 đỉnh trùng O thì khoảng cách từ đó đến 5 đỉnh còn lại $\leq \sqrt{3}$.

Nếu không có đỉnh nào trùng O thì tồn tại $1 \leq i < j \leq 6$ để $\angle A_i O A_j \leq 60^\circ \Rightarrow A_i A_j \leq \max\{OA_i; OA_j\} \leq \sqrt{3}$.

Như vậy trong 6 đỉnh bất kì luôn tồn tại 2 đỉnh không kề nhau. Từ đó theo Định lý Turan thì số cạnh của Đồ thị nhiều nhất là $\frac{6-1}{6-2} \cdot \frac{45^2}{2} = 810$.

Từ đó suy ra số cặp đỉnh không kề nhau ít nhất là $C_{45}^2 - 810 = 180$. Từ đó suy ra số cặp đỉnh có khoảng cách không vượt quá $\sqrt{3}$ ít nhất là 180 hay nói cách khác là có ít nhất 180 đoạn thẳng được tô màu đỏ.

Bây giờ ta chỉ ra một trường hợp thỏa mãn: Gọi ABCDE là ngũ giác đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{3}$.

Ta có $AB < OA = \sqrt{3}$. Chọn $R \in \left(0; \frac{AB - \sqrt{3}}{2}\right)$. Tại mỗi đỉnh ta vẽ một hình tròn tâm là đỉnh đó và bán kính R . Lấy 9 điểm phân biệt nằm trong mỗi phần giao của các đường tròn $(A; R); (B; R); (C; R); (D; R); (E; R)$ với $(O; \sqrt{3})$ thì ta sẽ có một cấu hình thỏa mãn. Vậy số đoạn thẳng màu đỏ ít nhất là 180.