

Câu 1. (1,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị biểu thức P khi $x = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}+1}$.

Câu 2. (1,0 điểm) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 2(m+2)x - 2m - 3$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$.

a) Xác định giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; -3)$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Một công ty đặt kế hoạch may 3000 chiếc áo trong một thời gian. Trong sáu ngày đầu công ty thực hiện đúng tiến độ. Những ngày sau đó mỗi ngày vượt mức 10 áo nên hoàn thành công việc trước hạn một ngày và may thêm được 60 chiếc áo nữa. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày công ty phải may bao nhiêu chiếc áo?

b) Cho phương trình: $x^2 - 3x + 4m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1^2 - x_2^2| = 12$.

Câu 4. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x - \sqrt{x-2} = 4$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} + \frac{2y-1}{y-2} = 5 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y-2} = \frac{13}{6} \end{cases}$$

Câu 5. (3,5 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AO , điểm E thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Các tia Ax và By lần lượt là tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) (Ax, By cùng thuộc một nửa mặt phẳng chứa điểm E có bờ là đường thẳng AB). Qua điểm E kẻ đường thẳng d vuông góc với EI cắt Ax, By lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $ENI = EBI$ và $AE \cdot IN = BE \cdot IM$.

c) Gọi P là giao điểm của AE và MI ; Q là giao điểm của BE và NI . Chứng minh hai đường thẳng PQ và AM vuông góc.

d) Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa điểm E của đường tròn (O) . Giả sử ba điểm E, I, F thẳng hàng. Tính diện tích tam giác MON theo R .

Câu 6. (0,5 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq 1.$$

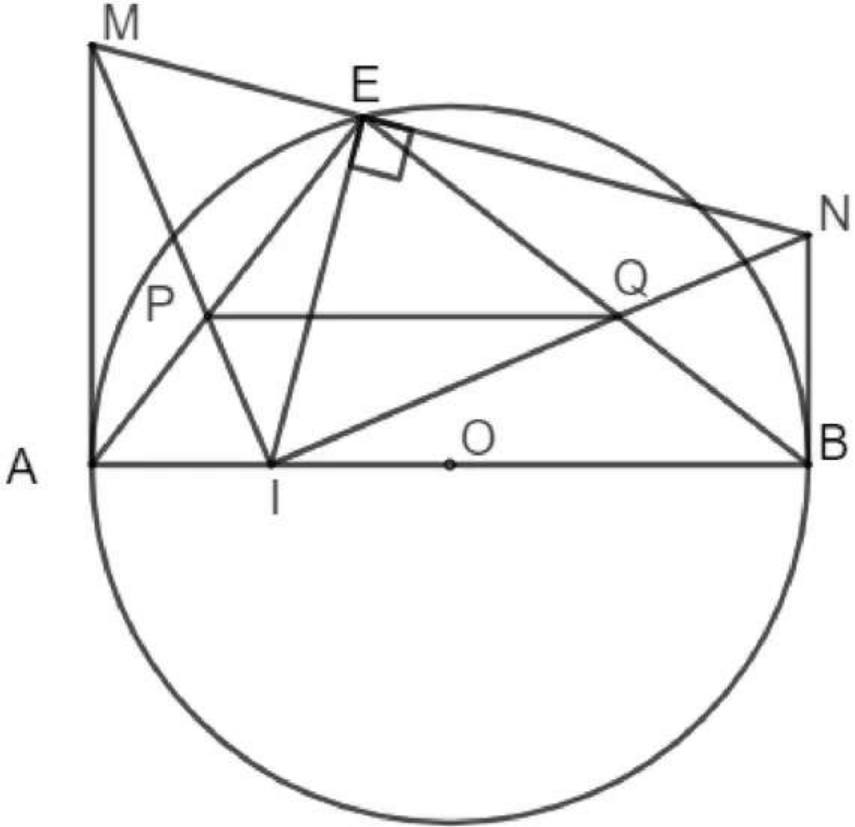
-----Hết-----

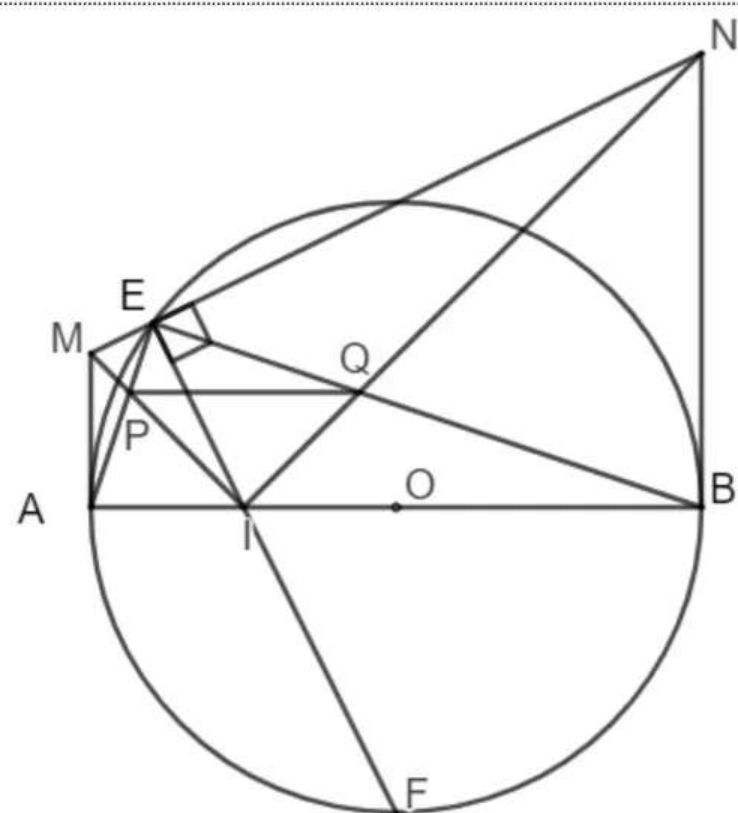
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
Câu 1	Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x}+1}$ ($x \geq 0; y \geq 0$).	1,0
	a) Rút gọn biểu thức P. $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x}+1} = \left(\frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2x}$ $= \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2x}$	0,25
	$= (x+\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}-1) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2x} = 2\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2x} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$	0,25
	b) Tính giá trị biểu thức P khi $x = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}+1}$. Ta có $x = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - \frac{3(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 3(\sqrt{2}-1)$ $= 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$	0,25
	$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}+1 \Rightarrow P = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}$	0,25
Câu 2	Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 2(m+2)x - 2m - 3$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$.	1,0
	a) Xác định giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; -3)$. Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; -3)$ nên ta có: $(d): 2(m+2) \cdot 2 - 2m - 3 = -3$ $\Leftrightarrow 4m + 8 - 2m - 3 = -3$ $\Leftrightarrow 2m = -8 \Leftrightarrow m = -4$	0,5
	b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m+2)x + 2m + 3 = 0 (*)$ Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$.	0,5

	$\Delta' = (m+2)^2 - 2m - 3 = m^2 + 4m + 4 - 2m - 3 = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$ $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -1.$ *Nếu học sinh đưa ra kết quả là $m > -1$ thì được 0,25.	
Câu 3	a) Một công ty đặt kế hoạch may 3000 chiếc áo trong một thời gian. Trong sáu ngày đầu công ty thực hiện đúng tiến độ. Những ngày sau đó mỗi ngày vượt mức 10 chiếc áo nên hoàn thành công việc trước hạn một ngày và may thêm được 60 chiếc áo nữa. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày công ty phải may bao nhiêu chiếc áo?	1,0
	Gọi số áo công ty phải may một ngày theo kế hoạch là x chiếc ($x > 0$). Số ngày cần để may xong 3000 áo theo kế hoạch là $\frac{3000}{x}$ ngày. Số áo công ty may được trong 6 ngày đầu là $6x$ chiếc áo. $\Rightarrow$ Số áo công ty may trong những ngày còn lại là $3060 - 6x$ chiếc áo Sau 6 ngày đầu, mỗi ngày công ty may được $x+10$ chiếc áo. $\Rightarrow$ Số ngày cần để may $3060 - 6x$ chiếc áo là $\frac{3060 - 6x}{x+10}$ ngày. Theo đề ra ta có phương trình $\frac{3000}{x} - \frac{3060 - 6x}{x+10} = 7$	0,5
	$\Leftrightarrow 3000(x+10) - (3060 - 6x)x = 7x(x+10)$ $\Leftrightarrow x^2 + 130x - 30000 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 120 & (TM) \\ x = -250 & (KTM) \end{cases}$ Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày công ty phải may 120 chiếc áo.	0,5
	b) Cho phương trình: $x^2 - 3x + 4m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 - x_2^2 = 12$.	1,0
	Ta có: $\Delta = (-3)^2 - 4(4m+1) = -16m + 5$ Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$ $\Leftrightarrow -16m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{16}.$	0,5
	Theo định lí Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 4m + 1 \end{cases}$ Mặt khác: $ x_2^2 - x_1^2 = 12 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 12 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 4$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 16$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16 \Leftrightarrow 9 - 4(4m+1) = 16$ $\Leftrightarrow -16m - 11 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{11}{16} \text{ (TM)}$ Vậy $m = -\frac{11}{16}$.	0,5
	a) Giải phương trình: $x - \sqrt{x-2} = 4$.	1,0

Câu 4	Điều kiện: $x-2 \geq 0 (*)$ hay $x \geq 2$ $x - \sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x-2 = (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 9x + 18 = 0 \end{cases}$	0,5
	Giải phương trình $x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 3 \end{cases}$ So sánh với điều kiện của phương trình và điều kiện bình phương hai vế, loại nghiệm $x = 3$. KL: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 6$. *Nếu học sinh không loại nghiệm $x = 3$ thì được 0,75.	0,5
	b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} + \frac{2y-1}{y-2} = 5 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y-2} = \frac{13}{6} \end{cases}$	1,0
	Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq 2 \end{cases}$. $\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} + \frac{2y-1}{y-2} = 5 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y-2} = \frac{13}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)+2}{x-1} + \frac{(2y-4)+3}{y-2} = 5 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y-2} = \frac{13}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 2 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y-2} = \frac{13}{6} \end{cases}$	0,5
	Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x-1} \\ v = \frac{1}{y-2} \end{cases}$ ta được hệ phương trình $\begin{cases} 2u + 3v = 2 \\ 3u + 2v = \frac{13}{6} \end{cases}$. Giải hệ phương trình trên ta được $\begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{1}{3} \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y-2} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \\ y-2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$	0,25
	Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AO, điểm E thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Các tia Ax và By lần lượt là tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) (Ax, By cùng thuộc một nửa mặt phẳng chứa điểm E có bờ là đường thẳng AB). Qua điểm E kẻ đường thẳng d vuông góc với EI cắt Ax, By lần lượt tại M và N.	3,5

		0,5
Câu 5	a) Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp. Ta có: $IAM = 90^\circ$ (AM là tiếp tuyến và AI là bán kính của (O)) $IEM = 90^\circ$ (giả thiết) nên $IAM + IEM = 180^\circ$ $\Rightarrow$ tứ giác $AMEI$ nội tiếp.	0,5
	b) Chứng minh $ENI = EBI$ và $AE.IN = BE.IM$. * Chứng minh $ENI = EBI$: Tứ giác $BIEN$ nội tiếp (vì có hai đỉnh E và B cùng nhìn IN dưới một góc vuông) $\Rightarrow ENI = EBI$ (hai góc nội tiếp cùng chắn IE).	0,5
	*Chứng minh $AE.IN = BE.IM$: Trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMEI$ có $EMI = EAI = \frac{1}{2}$ số đo EI. Lại có $ENI = EBI$ (chứng minh trên) Suy ra $\triangle AEB \sim \triangle MIN$ (g.g.) $\Rightarrow \frac{AE}{IM} = \frac{BE}{IN} \Leftrightarrow AE.IN = BE.IM$ (đpcm).	0,5
	c) Gọi P là giao điểm của AE và MI; Q là giao điểm của BE và NI. Chứng minh hai đường thẳng PQ và AM vuông góc. Do $\triangle AEB \sim \triangle MIN$ nên $MIN = AEB = 90^\circ \Rightarrow IPEQ$ là tứ giác nội tiếp (do có E, I cùng nhìn PQ dưới góc 90°) $\Rightarrow EQP = EIP$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EP). (1) Trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMEI$ có $EIM = EAM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ME). (2) Trong đường tròn (O) có $EBA = EAM = \frac{1}{2}$ số đo ME. (3) Từ (1), (2), (3) suy ra $EQP = EBA$. Mà EQP và EBA ở vị trí đồng vị suy ra $PQ \parallel AB \Rightarrow PQ \perp AM$.	1,0
	d) Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa điểm E của đường tròn (O). Giả sử ba điểm E, I, F thẳng hàng. Tính diện tích tam giác MON theo R.	0,5



Trong (O) có $AEF = 45^\circ$.

Trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMEI$ có $AMI = AEI = 45^\circ \Rightarrow \triangle AMI$ vuông cân tại

$$A \Rightarrow AM = AI = \frac{R}{2} \Rightarrow S_{\triangle AMO} = \frac{R^2}{4}.$$

Ở ý b ta đã chứng minh được $MIN = 90^\circ \Rightarrow BIN = 45^\circ \Rightarrow \triangle IBN$ vuông cân tại $B \Rightarrow NB = IB = \frac{3R}{2} \Rightarrow S_{\triangle BON} = \frac{3R^2}{4}$.

$ABNM$ là hình thang vuông tại A và $B \Rightarrow S_{ABNM} = 2R^2$.

Do đó $S_{MON} = S_{ABNM} - S_{OAM} - S_{BON} = R^2$.

* Nếu học sinh không tính ra kết quả hoặc tính sai kết quả thì không được điểm.

Câu 6

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq 1$ (*)

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 \geq 2xy \\ y^2 + z^2 \geq 2yz \\ z^2 + x^2 \geq 2zx \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

Theo giả thiết: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 3xyz$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq xyz \quad (1)$$

Từ giả thiết áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Leftrightarrow xyz \geq 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

0,5

0,25

0,25

Chú ý: Các cách giải khác đúng được chấm tối đa số điểm tương ứng với từng nội dung.