

**A) Hướng dẫn chung:**

- 1) Học sinh làm đúng đến đâu thì chấm đến đó. Học sinh trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo chấm tương ứng biểu điểm của HDC.
- 2) Việc chi tiết hoá thang điểm phải đảm bảo không làm sai lệch biểu điểm của HDC và phải được thống nhất trong toàn hội đồng chấm thi.
- 3) Điểm của bài thi không làm tròn.

**B) Hướng dẫn cụ thể:**

**Bài 1 (6,0 điểm).** Cho một số thực  $a$  lớn hơn 1 và một số nguyên dương  $n$ .

1. Giả sử  $n$  chẵn và  $Q(x)$  là một đa thức bậc  $n$  có hệ số cao nhất bằng 1 và có  $n$  nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại  $k$  nguyên dương sao cho đa thức  $P(x) = x^{n+1} + a^k Q(x)$  có  $n + 1$  nghiệm thực phân biệt.
2. Chứng minh rằng tồn tại đa thức  $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{R}[x]$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện
  - (i)  $|a_i| = a^{k_i}$ ,  $k_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
  - (ii)  $P(x)$  có  $n$  nghiệm thực phân biệt.
  - (iii) Nếu  $n$  chẵn thì số nghiệm âm và số nghiệm dương của  $P(x)$  bằng nhau; nếu  $n$  lẻ thì số nghiệm âm và số nghiệm dương của  $P(x)$  hơn kém nhau 1 đơn vị.

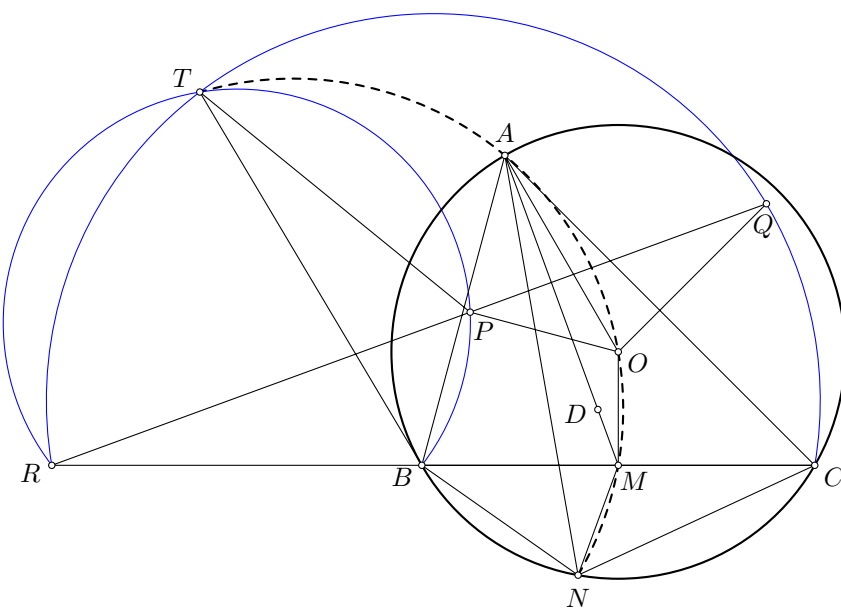
| Ý      | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Điểm |           |           |       |       |          |          |           |           |        |   |   |   |   |   |   |   |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----------|-----------|-------|-------|----------|----------|-----------|-----------|--------|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.1    | Giả sử $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ là $n$ nghiệm của $Q(x)$ . Hơn nữa, do $n$ chẵn nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = +\infty$ . Kết hợp với tính liên tục của $Q(x)$ , ta có bảng xét dấu                                                                                                                                                  | 1,0  |           |           |       |       |          |          |           |           |        |   |   |   |   |   |   |   |
|        | <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>x_3</math></td><td><math>\cdots</math></td><td><math>x_n</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>Q(x)</math></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table> |      | $x$       | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$    | $\cdots$ | $x_n$     | $+\infty$ | $Q(x)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | + |
|        | $x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      | $-\infty$ | $x_1$     | $x_2$ | $x_3$ | $\cdots$ | $x_n$    | $+\infty$ |           |        |   |   |   |   |   |   |   |
| $Q(x)$ | +                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0    | -         | 0         | +     | 0     | +        |          |           |           |        |   |   |   |   |   |   |   |
|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |      |           |           |       |       |          |          |           |           |        |   |   |   |   |   |   |   |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|     | <p>Suy ra tồn tại các số thực <math>y_1, y_2, \dots, y_{n+1}</math> sao cho</p> $y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \dots < y_n < x_n < y_{n+1}.$ <p>Khi đó <math>Q(y_i) &gt; 0</math> nếu <math>i</math> lẻ và <math>Q(y_i) &lt; 0</math> nếu <math>i</math> chẵn, <math>i = 1, 2, \dots, n+1</math> (đơn dấu).</p>                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,5 |
|     | <p>Do <math>n+1</math> lẻ nên <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \pm\infty</math>, suy ra tồn tại <math>k_i</math> đủ lớn sao cho <math>P(y_i) = y_i^{n+1} + a^{k_i}Q(y_i)</math> cùng dấu với <math>Q(y_i)</math>. Chọn <math>k &gt; \max\{k_1, k_2, \dots, k_{n+1}\}</math> thì <math>P(y_i)</math> cùng dấu với <math>Q(y_i)</math> với mọi <math>i = 1, 2, \dots, n+1</math>. Theo định lý giá trị trung gian, <math>P(x)</math> có <math>n+1</math> nghiệm <math>z_1, z_2, \dots, z_{n+1}</math> với</p> $z_1 < y_1 < z_2 < \dots < z_{n+1} < y_{n+1}.$ | 1,0 |
| 1.2 | <p>Ta chứng minh bằng quy nạp theo <math>n \in \mathbb{N}^*</math>. Để thấy với <math>n = 1</math>, ta chỉ cần chọn <math>P(x) = x - a</math> và với <math>n = 2</math>, ta chọn <math>P(x) = x^2 + ax - a</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1,0 |
|     | <p>Giả sử khẳng định đúng với <math>n \geq 2</math>. Xét <math>Q(x)</math> là một đa thức bậc <math>n = 2m</math> thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iii). Khi đó gọi <math>2m</math> nghiệm của <math>Q(x)</math> là</p> $x_1 < x_2 < \dots < x_m < 0 < x_{m+1} < x_{m+2} < \dots < x_{2m}.$ <p>Tương tự ý 1.1, tồn tại</p> $y_1 < x_1 < y_2 < \dots < y_m < x_m < y_{m+1} < 0$ $< x_{m+1} < y_{m+2} < \dots < x_{2m} < y_{2m+1},$ <p>sao cho các số <math>Q(y_i)</math> đơn dấu với <math>Q(y_1) &gt; 0</math>.</p>                                                 | 1,0 |
|     | <p>Cũng theo chứng minh trên, tồn tại <math>k \in \mathbb{N}^*</math> đủ lớn sao cho đa thức <math>P(x) = x^{2m+1} + a^k Q(x)</math> có <math>2m+1</math> nghiệm <math>z_1, \dots, z_{2m+1}</math> thỏa mãn</p> $z_1 < y_1 < z_2 < \dots < z_m < y_m < z_{m+1} < 0$ $< y_{m+1} < z_{m+2} < \dots < y_{2m} < z_{2m+1} < y_{2m+1}.$ <p>Từ đó <math>P(x)</math> thỏa mãn yêu cầu.</p>                                                                                                                                                                                    | 1,0 |
|     | <p>Bây giờ với đa thức <math>Q(x)</math> thỏa mãn yêu cầu bậc <math>n = 2m+1</math> thì xét đa thức <math>P(x) = x^{2m+2} - a^k Q(x)</math>, với <math>k</math> đủ lớn. Chứng minh tương tự, ta chỉ ra được <math>P(x)</math> có <math>2m+2</math> nghiệm với <math>m+1</math> nghiệm âm và <math>m+1</math> nghiệm dương. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.</p>                                                                                                                                                                                    | 0,5 |

**Bài 2** (7,0 điểm). Cho tam giác  $ABC$  nhọn có  $AB < AC$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $M$  là

trung điểm của  $BC$  và  $D$  là một điểm bất kì trên đoạn  $AM$  ( $D$  khác  $A$  và  $M$ ). Đường tròn tâm  $P$  và  $Q$  lần lượt ngoại tiếp các tam giác  $ABD$  và  $ACD$ . Đường đối trung qua  $A$  của tam giác  $ABC$  cắt  $(O)$  lần thứ hai tại  $N$ .

1. Chứng minh hai tam giác  $OPQ$  và  $NBC$  đồng dạng, từ đó chứng minh  $OA$  là đường đối trung của tam giác  $OPQ$ .
2. Gọi  $R$  là giao điểm của  $PQ$  và  $BC$ . Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $RBP$  và  $RCQ$  cắt nhau tại  $T$ . Chứng minh rằng năm điểm  $T, A, O, M, N$  đồng viên.

| Ý   | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                             | Điểm |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|     |                                                                                                                                                                   |      |
|     | Ta thấy $OP, PQ, QO$ lần lượt là trung trực của $AB, AD, AC$ kéo theo $OP \perp AB, PQ \perp AM, QO \perp AC$                                                                                                                                        | 1,0  |
|     | Kết hợp với $AN$ là đường đối trung của tam giác $ABC$ , ta có<br>$\widehat{OPQ} = \widehat{BAM} = \widehat{CAN} = \widehat{NBC}.$                                                                                                                   | 1,0  |
| 2.1 | Tương tự $\widehat{OQP} = \widehat{NCB}$ , kéo theo hai tam giác $OPQ$ và $NBC$ đồng dạng.                                                                                                                                                           |      |
|     | Tiếp tục kết hợp với $AN$ là đường đối trung của tam giác $ABC$<br>$\frac{d(A, OP)}{d(A, OQ)} = \frac{\frac{AB}{2}}{\frac{AC}{2}} = \frac{AB}{AC} = \frac{NB}{NC} = \frac{OP}{OQ}.$<br>Điều này dẫn đến $OA$ là đường đối trung của tam giác $OPQ$ . | 1,0  |
| 2.2 | Vì $AN$ là đường đối trung nên hai tam giác $ABM$ và $ANC$ đồng dạng. Ngược lại, $NA$ là đối trung của tam giác $NBC$ nên hai tam giác $NBM$ và $NAC$ đồng dạng.                                                                                     | 1,0  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Từ đó $\widehat{AMB} = \widehat{ACN} = \widehat{BMN}$ . Suy ra $\widehat{AMN} = 2\widehat{ACN} = \widehat{AON}$ . Vậy $A, O, M, N$ đồng viên.                                                                                                                                                                         | 1,0 |
| Do hai tam giác $OPQ$ và $NBC$ đồng dạng thuận nên theo cách dựng $R$ và $T$ thì tồn tại phép vị tự quay $S$ tâm $T$ sao cho $S : O \mapsto N, P \mapsto B, Q \mapsto C$ .                                                                                                                                            | 1,0 |
| <p>Từ đó</p> $\begin{aligned}\widehat{OTN} &= \widehat{PTB} = \widehat{PRB} = 90^\circ - \widehat{AMB} \\ &= 90^\circ - \widehat{ACN} = \frac{180^\circ - \widehat{AON}}{2} = \widehat{OAN}.\end{aligned}$ <p>Từ đó dẫn đến <math>T, O, A, N</math> đồng viên. Vậy năm điểm <math>T, A, O, M, N</math> đồng viên.</p> | 1,0 |

**Bài 3** (7,0 điểm). Với mỗi số nguyên dương  $n$ , xét tập hợp  $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Người ta tô màu cho tất cả các phần tử của  $S$ , mỗi phần tử được tô bởi đúng một trong hai màu xanh hoặc đỏ một cách ngẫu nhiên sao cho mỗi màu đều được dùng ít nhất một lần.

1. Tính số cách tô màu thỏa mãn điều kiện trong các số được tô màu xanh, không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp.
2. Tính xác suất của biến cố: “Số lớn nhất trong các số được tô màu xanh lớn hơn số nhỏ nhất trong các số được tô màu đỏ”.

| Ý   | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Điểm |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 3.1 | <p>Gọi <math>a_1 &lt; a_2 &lt; \dots &lt; a_k</math> là các số màu xanh của <math>S</math>, <math>a_{k+1} &lt; a_{k+2} &lt; \dots &lt; a_n</math> là các số tô màu đỏ của tập <math>S</math>, ở đó <math>k</math> là số nguyên dương nào đó mà <math>1 \leq k \leq n - 1</math>.</p> <p>Với mỗi số <math>k</math> cố định, trong các số <math>a_1, a_2, \dots, a_k</math> không có hai số nguyên liên tiếp khi và chỉ khi</p> $\begin{cases} 1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k \\ a_{i+1} - a_i > 1, i = 1, 2, \dots, k - 1. \end{cases}$ <p>Suy ra <math>1 \leq a_1 &lt; a_2 - 1 &lt; a_3 - 2 &lt; \dots &lt; a_k - (k - 1) \leq n - k + 1</math>.</p> | 1,0  |
|     | Nếu $k > n - k + 1$ hay $k > \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ thì không có cách chọn bộ $k$ số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_k$ thỏa mãn yêu cầu.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5  |
|     | Nếu $k \leq n - k + 1$ hay $k \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ thì số cách chọn bộ $k$ số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_k$ thỏa mãn yêu cầu là $\binom{n-k+1}{k}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1,0  |

|            |                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|            | Do đó số cách tô màu thỏa mãn yêu cầu là $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-k+1}{k}$ .                                                                                                                                                                                | 0,5 |
| <b>3.2</b> | Mỗi phần tử của $S$ có 2 cách tô màu nên số cách tô màu tất cả các phần tử của $S$ là $2^n$ . Do hai cách tô màu tất cả các phần tử của $S$ cùng một màu không thỏa mãn yêu cầu nên số cách tô màu thỏa mãn mỗi màu được dùng ít nhất một là $2^n - 2$ .                                | 1,0 |
|            | Gọi $X$ là biến cố “Số lớn nhất trong các số được tô màu xanh lớn hơn số nhỏ nhất trong các số được tô màu đỏ”. Khi đó $\overline{X}$ là biến cố “Số lớn nhất trong các số được tô màu xanh nhỏ hơn số nhỏ nhất trong các số được tô màu đỏ”.<br>Điều này tương đương $a_k < a_{k+1}$ . | 1,0 |
|            | Điều đó có nghĩa là tất cả các số nguyên dương không quá $a_k$ đều được tô màu xanh, các số còn lại đều được tô màu đỏ. Do màu nào cũng được sử dụng nên ta có $n - 1$ cách chọn $a_k$ thuộc tập $\{1; 2; \dots; n - 1\}$ .                                                             | 1,0 |
|            | Vậy xác suất cần tìm là<br>$P(X) = 1 - P(\overline{X}) = 1 - \frac{n-1}{2^n-2} = \frac{2^n-n-1}{2^n-2}.$                                                                                                                                                                                | 1,0 |

————HẾT————