

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI CHỌN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
PHAN BỘI CHÂU NĂM HỌC 2024-2025

Môn: **TOÁN HỌC**

Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)

Ngày thi thứ nhất: **11/09/2024**

(Đề thi gồm 01 trang, gồm 04 bài)

Câu 1. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = \frac{2024}{2025}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1 - x_n + x_n^2}$ với mọi $n \geq 0$.

Xét dãy (y_n) xác định bởi $y_0 = 2024$, $y_{n+1} = y_n + \frac{x_n}{y_n}$ với mọi $n \geq 0$. Chứng minh rằng (y_n) có giới hạn hữu hạn và $2024\frac{2024}{2025} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \leq 2025$.

Câu 2. Cho dãy F_n là dãy Fibonacci: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ với mọi $n \geq 0$. Với mọi $n > 4$, gọi R_n là số dư khi chia $\prod_{k=1}^{F_n-1} k^k$ cho F_n . Chứng minh rằng R_n là số Fibonacci.

Câu 3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , M là trung điểm BC . Một điểm X nằm trên (O) được gọi là *cân bằng* nếu đường thẳng qua X vuông góc với MX cắt AB, AC tại hai điểm cách đều M . Giả sử D, E, F là ba điểm *cân bằng* đôi một phân biệt. Chứng minh rằng M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

Câu 4. Tìm tất cả các hàm số liên tục, đơn điệu $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn:

$$f(xf(y)) + f(yf(x)) = 1 + f(x + y).$$

—————**Hết**—————

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.