

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{5-\sqrt{x}} - \frac{2x+4\sqrt{x}-4}{x-4\sqrt{x}-5}$

b) Cho Parabol $(P): y = mx^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - m^2$ (m là tham số, $m > 0$)

Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B . Chứng minh rằng khi đó hai điểm A và B nằm bên phải trục tung

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{a^{2021}}{b^{2021}} + \frac{b^{2022}}{c^{2022}} + \frac{c^{2023}}{a^{2023}}$$

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^{2022} = y^{2022} - y^{1348} - y^{674} + 2$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho hệ phương trình : $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9 \end{cases}$ (m là tham số)

Tìm các giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho biểu thức $A = 3x - y$ nhận giá trị nguyên

b) Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} - \sqrt{6-x-x^2} = 1$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại B . Trên cung AB lấy điểm M (M khác A và B). Tia AM cắt đường thẳng d tại C . Gọi I là trung điểm của AM . Tia IO cắt đường thẳng d tại C . Gọi I là trung điểm của AM . Tia IO cắt đường thẳng d tại N

a) Chứng minh rằng tứ giác $OBCI$ nội tiếp

b) Chứng minh $AI \cdot IC = IO \cdot IN$

c) Gọi E là hình chiếu của O trên AN . Chứng minh rằng $\frac{AN \cdot CE}{CN} = 2R$

d) Xác định vị trí của M để $2AM + AC$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $4a + 3b + 2c = 10$

Chứng minh rằng $\frac{3b+2c+15}{1+4a} + \frac{4a+2c+15}{1+3b} + \frac{4a+3b+15}{1+2c} \geq 15$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

c) Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{5-\sqrt{x}} - \frac{2x+4\sqrt{x}-4}{x-4\sqrt{x}-5}$

Điều kiện : $x \geq 0, x \neq 25$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{5-\sqrt{x}} - \frac{2x+4\sqrt{x}-4}{x-4\sqrt{x}-5} = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-5) + (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1) - 2x - 4\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)} \\ &= \frac{-3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)} = \frac{-3(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)} = \frac{-3}{\sqrt{x}-5} \end{aligned}$$

d) Cho Parabol (P): $y = mx^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x - m^2$ (m là tham số, $m > 0$) Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

Chứng minh rằng khi đó hai điểm A và B nằm bên phải trục tung

Do $m > 0$ nên phương trình $mx^2 - 2x + m^2 = 0$ (1) là phương trình bậc hai 1 ẩn có

$$\Delta' = 1 - m^3$$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thì

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (1-m)(1+m+m^2) > 0 \Leftrightarrow m < 1 \text{ (do } 1+m+m^2 > 0 \text{)}$$

Kết hợp với điều kiện đầu bài ta có $0 < m < 1$ thì (1) có 2 nghiệm phân biệt hay (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B

Theo định lý Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2}{m} > 0 \\ x_1 x_2 = m > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 > 0; x_2 > 0$$

Nên (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B nằm bên phải trục tung

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{a^{2021}}{b^{2021}} + \frac{b^{2022}}{c^{2022}} + \frac{c^{2023}}{a^{2023}}$$

Ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$$

$$\Rightarrow P = \frac{a^{2021}}{b^{2021}} + \frac{b^{2022}}{c^{2022}} + \frac{c^{2023}}{a^{2023}} = 3$$

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^{2022} = y^{2022} - y^{1348} - y^{674} + 2$

Ta có : $x^{2022} = y^{2022} - y^{1348} - y^{674} + 2$ (1)

Đặt $a = x^{674}, b = y^{674}, a, b \in \mathbb{N}^*$ ta được phương trình : $a^3 = b^3 - b^2 - b + 2$

Xét :

$$a^3 - (b-1)^3 = b^3 - b^2 - b + 2 - b^3 + 3b^2 + 1 = 2b^2 - 4b + 3 = 2(b-1)^2 + 1 > 0$$

$$\Rightarrow a^3 > (b-1)^3 \Rightarrow a^3 \geq b^3 \Leftrightarrow b^3 - b^2 - b + 2 \geq b^3$$

$$\Leftrightarrow b^2 + b - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (b+2)(b-1) \leq 0 \text{ (do } b+2 > b-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+2 \geq 0 \\ b-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq b \leq 1$$

$$\text{Do } b \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow b=1 \Rightarrow y^{674}=1 \Rightarrow y=1 (\text{do } y \in \mathbb{Q}^*) \Rightarrow x=1 (\text{do } x \in \mathbb{Q}^*)$$

$$\text{Vậy } (x; y) = (1; 1)$$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho hệ phương trình : $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9 \end{cases}$ (m là tham số)

Tìm các giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho biểu thức $A = 3x - y$ nhận giá trị nguyên

$$\text{Ta có : } \begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9 \end{cases} \cdot \text{Từ phương trình : } mx - y = 3 \Leftrightarrow y = mx - 3 \quad (1)$$

Thế $y = mx - 3$ vào phương trình $2x + my = 9$ ta được :

$$2x + m(mx - 3) = 9 \Leftrightarrow x = \frac{3m + 9}{m^2 + 2}$$

$$\text{Thay } x = \frac{3m + 9}{m^2 + 2} \text{ vào (1) ta được : } y = m \cdot \frac{3m + 9}{m^2 + 2} - 3 = \frac{9m - 6}{m^2 + 2}$$

$$\text{Vậy với mọi m, thì hệ có nghiệm } \begin{cases} x = \frac{3m + 9}{m^2 + 2} \\ y = \frac{9m - 6}{m^2 + 2} \end{cases} \cdot \text{Ta có :}$$

$$A = 3x - y = 3 \cdot \frac{3m + 9}{m^2 + 2} - \frac{9m - 6}{m^2 + 2} = \frac{33}{m^2 + 2}$$

$$\text{Để A có giá trị nguyên thì } 33 : (m^2 + 2) \Rightarrow m^2 + 2 \in \{3; 11; 33\} (\text{do } m^2 + 2 > 0) \Rightarrow m \in \{\pm 1; \pm 3\}$$

b) Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} - \sqrt{6-x-x^2} = 1$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} - \sqrt{6-x-x^2} = 1 \quad (-3 \leq x \leq 2)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 1) + (\sqrt{2-x} - \sqrt{(2-x)(x+3)}) = 0$$

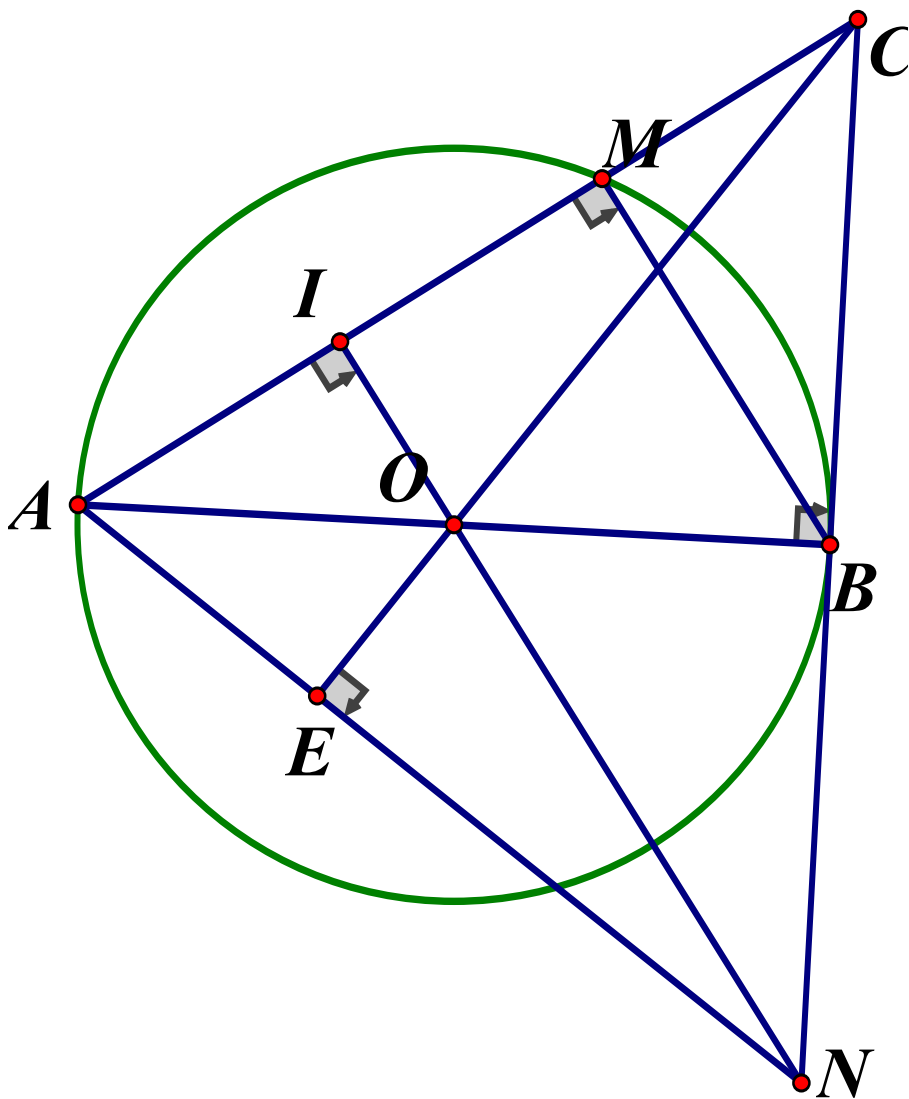
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 1) - (\sqrt{x-2})(\sqrt{x+3} - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 1)(1 - \sqrt{x-2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 1 \\ \sqrt{x-2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 1 \\ x-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \quad (tm)$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \{-2; 1\}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại B . Trên cung AB lấy điểm M (M khác A và B). Tia AM cắt đường thẳng d tại C . Gọi I là trung điểm của AM . Tia IO cắt đường thẳng d tại N . Gọi E là trung điểm của AB . Tia EO cắt đường thẳng d tại F .



e) Chứng minh rằng tứ giác $OBCI$ nội tiếp

Do $IA = IM$ (gt) $\Rightarrow OI \perp AM \Rightarrow \angle OIC = 90^\circ$

Vì (d) là tiếp tuyến của (O) tại $B \Rightarrow d \perp AB \Rightarrow \angle CBO = 90^\circ$

Xét tứ giác $OBCI$ có : $\angle OIC + \angle CBO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $OBCI$ nội tiếp

f) Chứng minh $AI \cdot IC = IO \cdot IN$

Xét $\triangle IOA$ và $\triangle ICN$ có :

$\angle AIO = \angle NIC = 90^\circ; \angle IAO = \angle INC$ (vì cùng phụ với $\angle ACB$)

Do đó $\triangle IOA \sim \triangle ICN$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IO}{IC} = \frac{IA}{IC} \Rightarrow IO \cdot IC = IA \cdot IC$ (đpcm)

g) Gọi E là hình chiếu của O trên AN. Chứng minh rằng $\frac{AN \cdot CE}{CN} = 2R$

Do O là trực tâm $\triangle ANC$ nên $CO \perp AN$ mà $OE \perp AN$

Suy ra ba điểm C, O, E thẳng hàng

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle CEN$ có :

$\angle ABN = \angle CEN = 90^\circ; \angle ANB$ chung

$\Rightarrow \frac{AB}{CE} = \frac{AN}{CN} \Rightarrow \frac{AN \cdot CE}{CN} = AB = 2R$ (đpcm)

h) Xác định vị trí của M để $2AM + AC$ đạt giá trị nhỏ nhất

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có : $2AM + AC \geq 2\sqrt{2AM \cdot AC}$ (1)

Mà $AM \cdot AC = AB^2 = 4R^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2AM + AC \geq 2\sqrt{2 \cdot 4R^2} = 4R\sqrt{2}$

Vậy $2AM + AC$ đạt giá trị nhỏ nhất là $4R\sqrt{2}$ khi $2AM = AC$ hay M là trung điểm AC

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $4a + 3b + 2c = 10$

Chứng minh rằng $\frac{3b+2c+15}{1+4a} + \frac{4a+2c+15}{1+3b} + \frac{4a+3b+15}{1+2c} \geq 15$

Đặt $x = 4a + 1; y = 3b + 1; z = 2c + 1$ (với x, y, z là các số dương). Suy ra $x + y + z = 13$

Thì bất đẳng thức đã cho trở thành: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn

$x + y + z = 13$. Chứng minh rằng :

$$\frac{y+z+13}{x} + \frac{x+z+13}{y} + \frac{x+y+13}{z} \geq 15$$

Ta có :

$$VT = \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{13}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{13}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 13$$

$$= \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + 13 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Cô si cho 2 số dương , ta có :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2, \text{ tương tự } \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2; \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2 \quad (2)$$

Ta lại có :

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = \frac{9}{13} \quad (\text{Do } x+y+z=13) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có : $VT \geq 2+2+2+13.\frac{9}{13}=15(dfcm)$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{13}{3} \Leftrightarrow a=\frac{10}{12}; b=\frac{10}{9}; c=\frac{10}{6}$