

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9
LAI CHÂU**

NĂM HỌC 2020 – 2021

Môn thi: **TOÁN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 11/4/2021

Bài 1. Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) So sánh A với $-\frac{5}{2}$

Bài 2.

a) Chứng minh rằng $2021 \cdot (43^{43} - 17^{17}) + 2020$ chia hết cho 5.

b) Giải phương trình $(x+3)(x-1) + \sqrt{(x+1)^2 + 2} = 0$

Bài 3.

1) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

b) Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 + 8x_1x_2$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ xy + 3y^2 + x = 3 \end{cases}$

Bài 4. Cho đường tròn (O;R) có đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C sao cho $AC = R$. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với CA. Lấy điểm M bất kỳ trên đường tròn (O) không trùng với A, B. Tia BM cắt đường thẳng d tại P. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N, tia PA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là Q.

a) Chứng minh tứ giác ACPM nội tiếp.

b) Chứng minh rằng PC song song với NQ.

c) Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác CMB luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M thay đổi trên đường tròn (O).

Bài 5. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – LAI CHÂU (2020 – 2021)

Bài 1.

a)

ĐKXD : $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$. Khi đó, ta có :

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x}} \right)$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right)$$

$$A = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} : \frac{\sqrt{x+2}+x-9-x+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}}$$

b) Ta có: $A + \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}} + \frac{5}{2} = \frac{7\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}+1)} > 0$ (Vì $7\sqrt{x}+1 > 0$, $2(\sqrt{x}+1) > 0$)

Suy ra: $A > -\frac{5}{2}$

Bài 2.

a) Ta có $43^{43} = 43^{40} \cdot 43^3 = (43^4)^{10} \cdot 43^3$

Do 43^3 có tận cùng là chữ số 7 nên 43^4 có tận cùng là chữ số 1 hay 43^{40} có tận cùng là chữ số 1

Mà 43^3 có tận cùng là chữ số 7. Vậy $43^{40} \cdot 43^3$ có tận cùng là chữ số 7 hay 43^{43} có tận cùng là chữ số 7.

Ta có $17^{17} = (17^4)^4 \cdot 17$

Vì 17^4 có tận cùng là 1 nên $(17^4)^4$ cũng có tận cùng là 1 hay 17^{16} có tận cùng là 1

Do đó: 17^{17} có tận cùng là 7

Hai số 43^{43} và 17^{17} có chữ số tận cùng giống nhau nên $43^{43} - 17^{17}$ có chữ số tận cùng là 0.

Do đó $43^{43} - 17^{17}$ chia hết cho 5

Lúc đó $2021 \cdot (43^{43} - 17^{17}) + 2020$ chia hết cho 5.

b) Phương trình đã cho tương đương với:

$$x^2 + 2x - 3 + \sqrt{x^2 + 2x + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 + \sqrt{x^2 + 2x + 3} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 3)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 3} - 2 = 0 \text{ (vì } \sqrt{x^2 + 2x + 3} + 3 > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$$

Bài 3.

1) Để phương trình có nghiệm: $\Delta' = m^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -3 \end{cases}$

2) Ta có:

$$P = (x_1 + x_2)^2 + 6x_1x_2 = 4(m+1)^2 + 6(2m-10) = (2m+5)^2 + 36 \geq 36$$

KL: MinP=36, P nhỏ nhất khi $2m+5=0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$

2) Hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 & (1) \\ xy + 3y^2 + x = 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra: $(x^2 - y^2) + y(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y \end{cases}$

Với $x = y$, thay vào (2) ta được: $4x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = \frac{3}{4}$

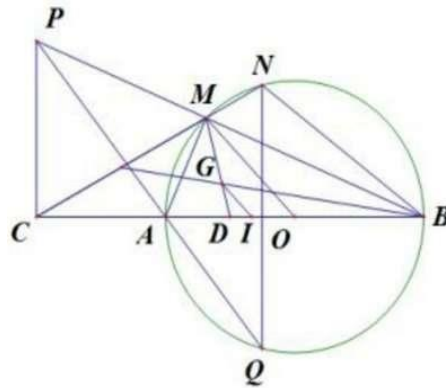
Khi đó: $(x; y) = (-1; -1) = (\frac{3}{4}; \frac{3}{4})$

Với $x = -2y$, thay vào (2) ta được: $y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = -1; y_2 = 3$

Khi đó: $(x; y) = (2; -1) = (-6; 3)$

Vậy hệ có 4 nghiệm: $(x; y) = (-1; -1) = (\frac{3}{4}; \frac{3}{4}) = (2; -1) = (-6; 3)$

Bài 4.



a) AB là đường kính của (O) ($M \in (O)$) $\Rightarrow \widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMP} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMP} + \widehat{ACP} = 90^\circ$$

Suy ra tứ giác ACPM nội tiếp đường tròn.

b) Có AMNQ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MNQ} = \widehat{PAM}$ (góc trong tại một đỉnh và góc ngoài tại đỉnh đối diện)

(1)

AMPC là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{PCM} = \widehat{PAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung PM) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{MNQ} = \widehat{PCM}$

Hai góc ở vị trí so le nhau nên PC//NQ

c) Gọi D là trung điểm BC, là điểm cố định. Qua G kẻ đường thẳng song song MO cắt AB tại I

G là trọng tâm tam giác BCM nên $G \in$ đoạn MD và $MG = \frac{2}{3}MD$

Do $GI // MO$ nên theo định lí Ta – lét cho tam giác DMO ta có:

$$I \in \text{đoạn } MO \text{ và } \frac{OI}{OD} = \frac{MG}{MD} = \frac{2}{3} \Rightarrow OI = \frac{2}{3}.OD$$

Mà O, D là hai điểm cố định nên I cố định.

$$\text{Do } GI // MO \text{ nên theo định lí Ta – lét ta có: } \frac{GI}{MO} = \frac{DG}{DM} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG = \frac{1}{3}MO = \frac{R}{3}$$

$\Rightarrow$ G luôn cách điểm I cố định một khoảng $\frac{R}{3}$ không đổi.

$\Rightarrow$ Khi M di động, điểm G luôn nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $\frac{R}{3}$

Bài 5. Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} \Rightarrow \frac{x^2}{y+z} \geq x - \frac{y+z}{4}$

Tương tự: $\frac{y^2}{z+x} \geq y - \frac{z+x}{4}, \frac{z^2}{x+y} \geq z - \frac{x+y}{4}$

$$\text{Do đó: } P \geq x + y + z - \left(\frac{y+z}{4} + \frac{z+x}{4} + \frac{x+y}{4}\right) = \frac{x+y+y}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

MinP = 1. Dấu “=” xảy ra khi: $x = y = z = \frac{2}{3}$