

Câu 1 (4,0 điểm). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 > 0, u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + \frac{8}{u_n^2}), \forall n \geq 1$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải:

Dễ có $u_n > 0 \forall n \geq 1$

$$\text{Do đó } u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + u_n + \frac{8}{u_n^2}) \geq 2 \forall n \geq 1$$

$$\text{Khi đó } \frac{8}{u_n^2} \leq u_n \text{ nên } u_{n+1} \leq u_n \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn L .

$$\text{Từ đó } L = \frac{1}{3}(2L + \frac{8}{L^2})$$

$$\text{Hay } L = 2$$

Câu 2 (5,0 điểm).

- a) Cho số nguyên dương n và hai số nguyên x, y . Chứng minh rằng nếu $x - y$ chia hết cho n thì $x^n - y^n$ chia hết cho n^2 .
- b) Cho số nguyên dương $n \geq 2$ và S là tập hợp các số nguyên a thuộc $[0; n^2 - 1]$ sao cho **không** tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^n + y^n \equiv a \pmod{n^2}$. Chứng minh rằng số phần tử của S không nhỏ hơn C_n^2 .

Lời giải:

$$\text{a) Xét } x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + \dots + y^{n-1})$$

$$\text{Nếu } x - y : n \text{ ta có } x^{n-1} + \dots + y^{n-1} \equiv ny^{n-1} \pmod{n} \text{ nên } x^{n-1} + \dots + y^{n-1} : n.$$

- b) Theo câu a có số dư của x^n khi chia cho n^2 chỉ có thể nhận n giá trị và y^n cũng vậy.

Do đó số số dư có thể nhận của $x^n + y^n$ khi chia cho n^2 tối đa là C_n^2 nếu $x \not\equiv y \pmod{n}$ và thêm n giá trị với $x \equiv y \pmod{n}$.

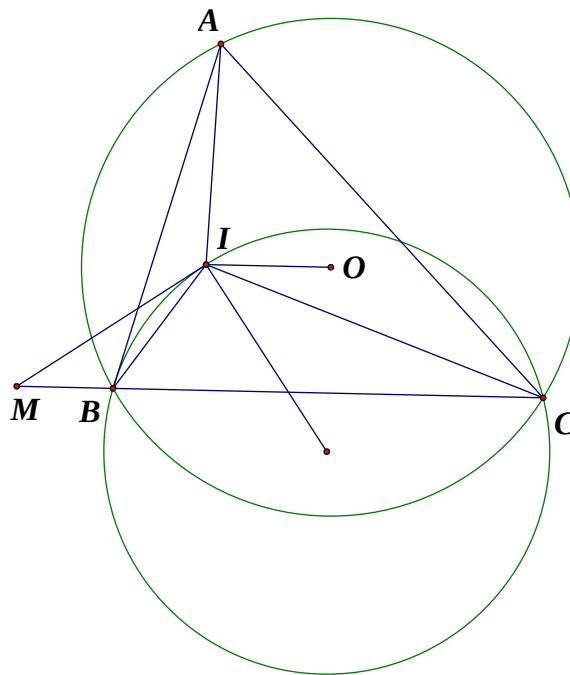
Do đó số số dư tối đa là: $C_n^2 + n = \frac{n(n+1)}{2}$ và số giá trị tối thiểu của a là $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = C_n^2$

Câu 3 (5,0 điểm).

- a) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm I bất kỳ trong tam giác. Tiếp tuyến tại I của đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC cắt đường thẳng BC tại M . Tiếp tuyến tại I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ICA cắt đường thẳng CA tại N . Tiếp tuyến tại I của đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB cắt đường thẳng AB tại P . Chứng minh rằng M, N, P cùng thuộc một đường thẳng l và l vuông góc với OI .
- b) Gọi B_1, C_1 là tâm các đường tròn bàng tiếp các góc B, C của tam giác ABC . Đường thẳng B_1C_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm D (khác A). Các đường thẳng đi qua B_1 , vuông góc AC và đi qua C_1 , vuông góc AB cắt nhau tại E . Chứng minh rằng $\angle ADE = 90^\circ$.

Lời giải:

a)



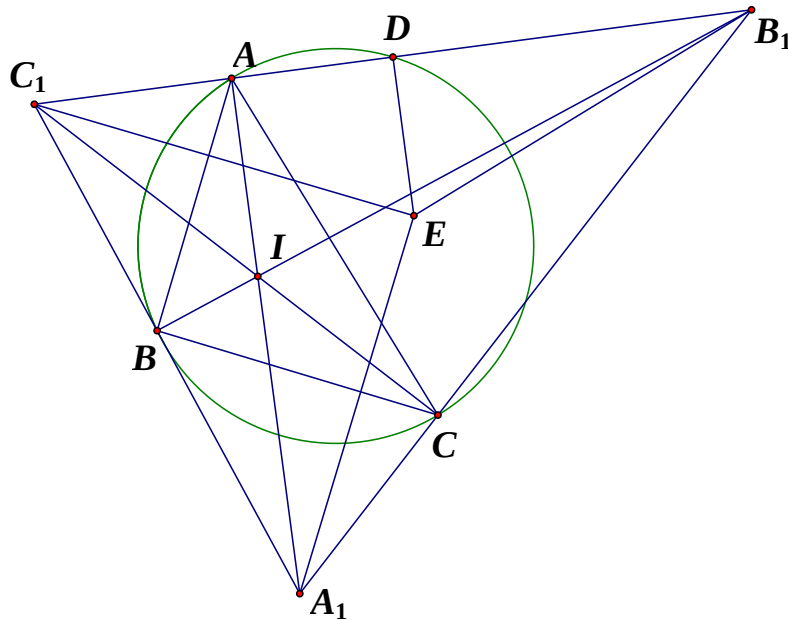
Ta có hai tam giác IMB và ICM đồng dạng nên $MI^2 = MB.MC$

Xét hai đường tròn: (O) và đường tròn tâm I bán kính 0 thì

Phương tích của M với hai đường tròn đó bằng nhau, nên M thuộc trục đẳng phương l của hai đường tròn đó. Tương tự với N, P .

Ta được M, N, P thuộc đường thẳng l vuông góc OI .

b)



Giả sử các đường thẳng qua B_1 , vuông góc AC và qua C_1 , vuông góc AB cắt nhau tại E.

Ta có $\angle EB_1C_1 = 90^\circ - \angle CAB_1 = \frac{1}{2}A = \angle EC_1B_1$ nên $EB_1 = EC_1$.

Gọi $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ là các đường thẳng qua A_1 và vuông góc BC, qua B_1 và vuông góc AC, qua C_1 và vuông góc AB, gọi Δ_A cắt Δ_B tại X, và cắt Δ_C tại Y thì lập luận tương tự trên, ta có

$$\angle YC_1A_1 = \angle YA_1B_1 \text{ và } \angle XA_1B_1 = \angle XB_1A_1$$

Áp dụng định lý Ceva dạng sin trong tam giác $A_1B_1C_1$, ta được $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ đồng quy tại E.

Hơn nữa E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

Ngoài ra rõ ràng A, B, C là chân đường cao từ A_1, B_1, C_1 của tam giác $A_1B_1C_1$.

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn Euler của tam giác $A_1B_1C_1$, tức là D là trung điểm B_1C_1 và $\angle ADE = 90^\circ$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho ba đa thức bậc hai $P(x), Q(x)$ và $R(x)$ có hệ số cao nhất dương. Biết rằng $P(x)$ có hai nghiệm thực phân biệt a_1, a_2 , $Q(x)$ có hai nghiệm thực phân biệt b_1, b_2 và $R(x)$ có hai nghiệm thực phân biệt c_1, c_2 thỏa mãn: $Q(a_1) + R(a_1) = Q(a_2) + R(a_2)$; $P(b_1) + R(b_1) = P(b_2) + R(b_2)$ và $P(c_1) + Q(c_1) = P(c_2) + Q(c_2)$. Chứng minh rằng $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2$.

Lời giải:

Xét đa thức $H(x) = P(x) + Q(x) + R(x)$ thì $H(x)$ là đa thức bậc hai với hệ số dương.

Ta có $H(a_1) = H(a_2), H(b_1) = H(b_2); H(c_1) = H(c_2)$

Giả sử $H(x) = ax^2 + bx + c$ và $H(a_1) = H(a_2) = m$ thì a_1, a_2 là các nghiệm của phương trình

$$ax^2 + bx + c - m = 0. \text{ Từ đó } a_1 + a_2 = \frac{-b}{a}. \text{ Tương tự } b_1 + b_2 = \frac{-b}{a} \text{ và } c_1 + c_2 = \frac{-b}{a}.$$

Ta được $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2$.

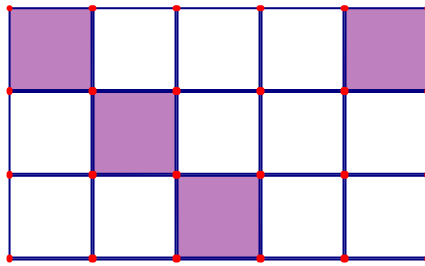
Ví dụ: $P(x) = (x-3)(x-4); Q(x) = (x-2)(x-5); R(x) = (x-1)(x-6)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho bảng ô vuông kích thước $m \times n$ (m, n là các số nguyên dương). Ban đầu ta tô màu đen cho k ô bất kỳ (k nguyên dương, $k \geq 2$). Sau đó, cứ mỗi bước ta được phép tô đen thêm một ô của bảng nếu ô đó có cạnh chung với ít nhất hai ô đen.

- Khi $m=3, n=5$. Hãy chỉ ra một cách tô 4 ô ban đầu sao cho sau hữu hạn bước tất cả các ô trong bảng đều được tô.
- Tìm số k nhỏ nhất theo m, n để sau hữu hạn bước, ta có thể tô đen tất cả các ô vuông trong bảng.

Lời giải:

- Một cách tô ví dụ



-

Ta gọi một cạnh của một hình vuông đơn vị là một “**cạnh biên giới**” nếu nó vừa thuộc ô vuông màu đen, vừa thuộc ô vuông màu trắng.

Ta xét một mảng màu đen là tập hợp các ô màu đen mà hai ô bất kỳ có ít nhất 1 cạnh chung, định nghĩa đường biên của mảng màu đen đó là tập hợp tất cả các “**cạnh biên giới**” của các ô vuông thuộc mảng đen đó và độ dài đường biên là tổng độ dài các “**cạnh biên giới**” thuộc đường biên đó.

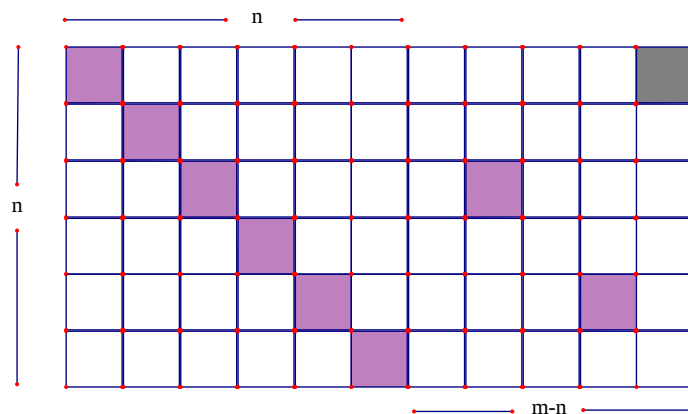
Ta có nhận xét sau: Nếu ta tô thêm một ô màu đen thì tổng độ dài các đường biên của tất cả các mảng đen không đổi hoặc giảm đi.

Ban đầu có k ô đen, tổng độ dài nói trên tối đa là $4k$. Nếu cuối cùng ta tô xong bảng thành đen thì độ dài thu được là $2(m+n)$.

$$\text{Từ đó } 4k \geq 2(m+n) \Rightarrow k \geq \frac{m+n}{2} \text{ hay } k \geq \left\lceil \frac{m+n+1}{2} \right\rceil$$

Dấu “=” xảy ra khi: $k = \lfloor \frac{m+n+1}{2} \rfloor$

Giả sử $n < m$. Ta xét một cách tô màu $k = \lfloor \frac{m+n+1}{2} \rfloor$ ô ban đầu để có thể tô hết cả bảng như hình vẽ sau



Tức là ta tô màu đen đường chéo của bảng vuông $n \times n$ sau đó cột tiếp theo không tô ô nào, cột ngay sau đó tô đúng 1 ô và cứ như vậy, riêng nếu $m-n$ lẻ, thêm 1 ô bất kỳ

Để thấy làm như vậy thì số ô đen ban đầu là: $n + \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{m+n+1}{2} \rfloor$ và ta có thể tô kín bảng.