

ĐỀ BÀI

Bài 1. (2,5 điểm)

Cho $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- a) Tìm một đa thức bậc hai $Q(x)$ với hệ số nguyên sao cho a là nghiệm của $Q(x)$
b) Cho đa thức: $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$. Tính giá trị của $P(a)$

Bài 2. (3,0 điểm)

Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm O , bán kính R . Giả sử C là điểm cố định trên tia đối của tia BA . Một cát tuyến thay đổi qua C cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa C, E). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ACE cắt nhau tại giao điểm thứ hai M . Biết rằng bốn điểm O, B, M, E tạo thành tứ giác $OBME$.

Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác $OBME$ nội tiếp.
b) $CD \cdot CE = CO^2 - R^2$.
c) M luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.

Bài 3. (2,0 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương N sao cho N có thể biểu diễn một cách duy nhất ở dạng

$\frac{x^2y+1}{xy+1}$ với x, y là hai số nguyên dương.

Bài 4. (2,5 điểm)

Cho a, b, c là ba số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn được dưới dạng lũy thừa của 2 với số mũ tự nhiên. Biết rằng phương trình bậc hai $ax^2 - bx + c = 0$ (1) có cả hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (2,5 điểm)

Cho $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

a) Tìm một đa thức bậc hai $Q(x)$ với hệ số nguyên sao cho α là nghiệm của $Q(x)$

b) Cho đa thức: $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$. Tính giá trị của $P(\alpha)$

Lời giải

a). Tìm một đa thức bậc hai $Q(x)$ với hệ số nguyên sao cho α là nghiệm của $Q(x)$

Cách 1:

$$\text{Có } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2\alpha - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4\alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0.$$

Phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ có hệ số nguyên và có 2 nghiệm $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $Q(x) = x^2 - x - 1$ thỏa yêu cầu bài.

Cách 2:

$$\text{Có } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ đặt } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \cdot \beta = -1 \end{cases}$$

Phương trình có hệ số nguyên nhận α, β làm nghiệm là $x^2 - x - 1 = 0$

Vậy $Q(x) = x^2 - x - 1$ thỏa yêu cầu bài.

$$\text{b) } P(x) = x^5 - x^4 - x + 1 = x^5 - x^4 - x^3 + x^3 - x + 1$$

$$P(x) = x^3(x^2 - x - 1) + x^3 - x^2 - x + x^2 + 1$$

$$P(x) = (x^2 - x - 1)(x^3 + x) + x^2 + 1$$

$$P(\alpha) = (\alpha^2 - \alpha - 1)(\alpha^3 + \alpha) + \alpha^2 + 1.$$

$$P(\alpha) = 0 + \alpha^2 + 1 \text{ (Do } \alpha \text{ là nghiệm của phương trình: } x^2 - x - 1).$$

$$\text{Mà } \alpha^2 + 1 = \alpha + 2 \text{ nên}$$

$$P(\alpha) = \alpha^2 + 1 = \alpha + 2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Vậy } P(\alpha) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 2. (3,0 điểm)

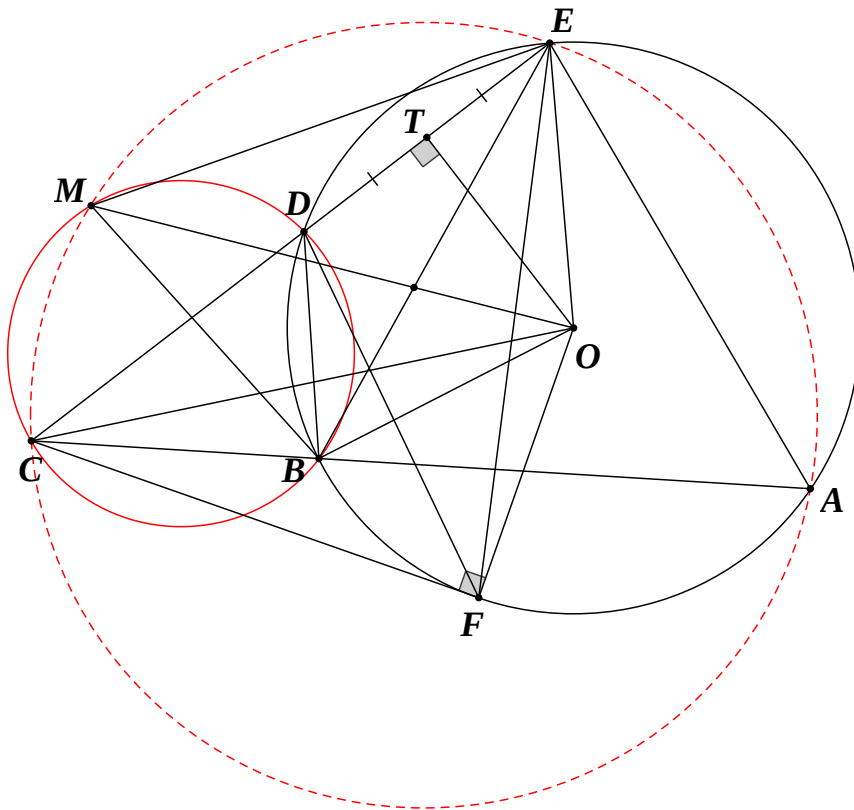
Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm O , bán kính R . Giả sử C là điểm cố định trên tia đối của tia BA . Một cát tuyến thay đổi qua C cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa C, E). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và

ACE cắt nhau tại giao điểm thứ hai M . Biết rằng bốn điểm O, B, M, E tạo thành tứ giác $OBME$.

Chứng minh rằng:

- Tứ giác $OBME$ nội tiếp.
- $CD.CE = CO^2 - R^2$.
- M luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $OBME$ nội tiếp.

$$\begin{aligned}\widehat{EOB} &= 2\widehat{BAE} = 2\widehat{BDC} = 2\widehat{BMC} = 2(\widehat{EMC} - \widehat{EMB}) \\ &= 2(180^\circ - \widehat{EAB} - \widehat{EMB}) \\ &= 360^\circ - \widehat{EOB} - 2\widehat{EMB}\end{aligned}$$

suy ra $\widehat{EOB} + \widehat{EMB} = 180^\circ$ hay tứ giác $OBME$ nội tiếp.

b) Chứng minh $CD.CE = CO^2 - R^2$.

Cách 1.

Kẻ CF là tiếp tuyến của (O) , suy ra $CF \perp OF \Rightarrow CF^2 = CO^2 - OF^2 = CO^2 - R^2$ (1)

Mặt khác: $\triangle CDF \sim \triangle CFE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CD}{CF} = \frac{CF}{CE} \Rightarrow CF^2 = CD.CE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $CD.CE = CO^2 - R^2$.

Cách 2.

Gọi T là trung điểm DE .

$$\text{Có } CD \cdot CE = (CT - TD)(CT + TE), \quad TD = TE$$

$$= CT^2 - TD^2 = CO^2 - OT^2 - TD^2 = CO^2 - OD^2 = CO^2 - R^2$$

c) Chứng minh M luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.

$\widehat{OMC} = \widehat{OMB} + \widehat{BMC} = \widehat{OEB} + \widehat{EAB} = 90^\circ$ hay M luôn di chuyển trên đường tròn đường kính OC cố định.

Bài 3.

(2,0 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương N sao cho N có thể biểu diễn một cách duy nhất ở dạng

$$\frac{x^2 y + 1}{xy + 1} \text{ với } x, y \text{ là hai số nguyên dương.}$$

Lời giải

$$N = \frac{x^2 + y}{xy + 1} \Leftrightarrow x^2 - Nxy - N + y = 0 \Leftrightarrow x(Ny - x) = y - N \quad (1)$$

Với $N = 1$ dễ thấy có vô số cách biểu diễn N theo x, y

là các bộ số dạng $(x, y) = (a, a + 1) \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

Với $N \geq 2$

$$\text{Nếu } y = N \Rightarrow x = N^2$$

$$\text{Nếu } y \neq N \text{ thì } (1) \Rightarrow y - N : x \Rightarrow |y - N| \geq x$$

suy ra trong hai số $y; N$ có ít nhất một số lớn hơn x

$$\Rightarrow Ny - x > 0 \Rightarrow y - N > 0 \Rightarrow y > N \Rightarrow y > x$$

$$\text{Từ } (1) \Rightarrow y - N : Ny - x \Rightarrow y - N \geq Ny - x \geq 2y - x \geq y + (y - x) \geq y \Rightarrow N \leq 0 \text{ (loại)}$$

Vậy với $N \geq 2$ thì ta có một biểu diễn duy nhất ở dạng $\frac{x^2 + y}{xy + 1}$

Cách khác.

$$+) \quad N = 1 \text{ có vô số bộ } (x; y) \text{ có dạng } (k; k + 1) \quad (k \in \mathbb{N}) \text{ thỏa mãn } \frac{x^2 + y}{xy + 1} = N.$$

Suy ra $N = 1$ loại

+) $N \neq 1$

$$x^2 + y : xy + 1$$

$$\Rightarrow y(x^2 + y) - x(xy + 1) : xy + 1 \Rightarrow y^2 - x : xy + 1$$

$$+) \quad x < y \Rightarrow x^2 + y \leq xy + y < 2xy + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y \leq xy + xy = 2xy < 2xy + 2 \Rightarrow \frac{x^2 + y}{xy + 1} < 2 \Rightarrow N < 2 \text{ vô lý.}$$

$$+) \quad x \geq y \Rightarrow -(xy + 1) < -x < y^2 - x < y^2 < xy + 1$$

$$\Rightarrow y^2 - x = 0 \Rightarrow x = y^2$$

$$\Rightarrow N = \frac{y^4 + y}{y^2 + 1} = y$$

$$\Rightarrow x = N^2$$

Với mọi $N > 1$ thì cặp $(N^2; N)$ là duy nhất

Bài 4. (2,5 điểm)

Cho a, b, c là ba số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn được dưới dạng lũy thừa của 2 với số mũ tự nhiên. Biết rằng phương trình bậc hai $ax^2 - bx + c = 0$ (1) có cả hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $a = 2^k; b = 2^n; c = 2^m$ ($k, m, n \in \mathbb{N}$)

Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm nguyên của phương trình $ax^2 - bx + c = 0$

Ta có $ax_1^2 - bx_1 + c = 0 \Rightarrow c = x_1(b - ax_1) > 0 \Rightarrow c : x_1 \Rightarrow 2^m : x_1$ tương tự $2^m : x_2$ (1)

Theo hệ thức Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2^{n-k} \\ x_1 \cdot x_2 = 2^{m-k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$ (2)

Từ (1); (2) $\Rightarrow x_1; x_2$ là các lũy thừa với số mũ tự nhiên của 2.

Đặt $x_1 = 2^p, x_2 = 2^q$ ($p, q \in \mathbb{N}$) không mất tính tổng quát giả sử $p \geq q$.

Khi đó $x_1 + x_2 = 2^{n-k} \Leftrightarrow 2^q(2^{p-q} + 1) = 2^{n-k} \Rightarrow 2^{p-q} + 1 = 2^{n-k-q}$

Vì $2^{p-q} + 1 \geq 2 \Rightarrow 2^{n-k-q} \geq 2 \Rightarrow 2^{n-k-q}$ là số chẵn $\Rightarrow 2^{p-q} + 1$ là số chẵn $\Rightarrow 2^{p-q} = 1 \Rightarrow p - q = 0 \Leftrightarrow p = q \Rightarrow x_1 = x_2$ (đpcm).

Cách 2:

Đặt $a = 2^n; b = 2^m; c = 2^p$ ($m; n; p \in \mathbb{N}$).

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) có $\Delta = b^2 - 4ac = 2^{2m} - 2^{n+p+2}$.

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương.

$$\Rightarrow 2^{2m} - 2^{n+p+2} = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow 2^{n+p+2} = (2^m - k)(2^m + k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^m - k = 2^u \\ 2^m + k = 2^v \end{cases} \quad (u < v) \Rightarrow 2^m = \frac{2^u + 2^v}{2} = 2^{u-1}(1 + 2^{v-u}).$$

Nếu $u \neq v$ thì $1 + 2^{v-u}$ là số lẻ và khác 1 (vô lý).

Suy ra $u = v \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \Delta = 0$.

Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm bằng nhau.