

Bài 1. (2,0 điểm)

- a) Không sử dụng máy tính, hãy tìm giá trị của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

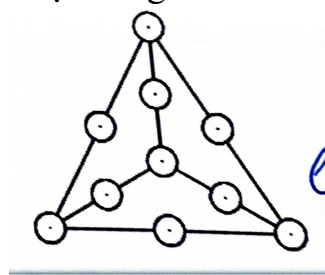
- b) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Chứng minh rằng, nếu đa thức $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x thì $2a, a+b, c$ đều là những số nguyên. Sau đó, chứng tỏ rằng, nếu ba số $2a, a+b, c$ là những số nguyên thì $P(x)$ cũng nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x

Bài 2. (3,0 điểm) Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (O) . Cung nhỏ OB của đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC cắt đường tròn (O) tại điểm E . Tia BE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F

- a) Chứng minh rằng tia EO là tia phân giác của góc CEF
b) Chứng minh rằng tứ giác $ABOF$ nội tiếp
c) Gọi D là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE và đường tròn (O) . Chứng minh rằng ba điểm A, F, D thẳng hàng

Bài 3. (2,0 điểm) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $ab = cd$. Chứng minh rằng số $N = a^{2022} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2022}$ là hợp số

Bài 4. (2,0 điểm) Ta viết mười số $0, 1, 2, \dots, 9$ vào mười ô tròn trong hình bên dưới, mỗi số được viết đúng 1 lần. Sau đó, ta tính tổng của ba số trên mỗi đoạn thẳng để nhận được 6 tổng. Có hai không một cách viết 10 số như thế sao cho 6 tổng nhận được bằng nhau.



Bài 5. (1,0 điểm)

- a) Trong mặt phẳng cho năm điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác tù có các đỉnh được lấy từ năm điểm đã cho
b) Trong mặt phẳng cho 2022 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2018 tam giác tù mà mỗi tam giác tù đó có các đỉnh được lấy từ 2022 điểm đã cho

ĐÁP ÁN

Bài 1. (2,0 điểm)

c) Không sử dụng máy tính, hãy tìm giá trị của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

$$\text{Ta có } P = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3} = 1+\sqrt{2} + 1-\sqrt{2} = 2$$

d) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Chứng minh rằng, nếu đa thức

$P(x)$ nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x thì $2a, a+b, c$ đều là những số nguyên. Sau đó, chứng tỏ rằng, nếu ba số $2a, a+b, c$ là những số nguyên thì $P(x)$ cũng nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x

Giả sử $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên x . Khi đó, ta có :

$P(-1), P(0), P(1)$ là các số nguyên. Suy ra $a-b+c, c, a+b+c$ là các số nguyên. Từ đó ta có : $a+b = (a+b+c) - c$ là số nguyên và $2a = (a+b+c) + (a-b-c)$ là số nguyên.

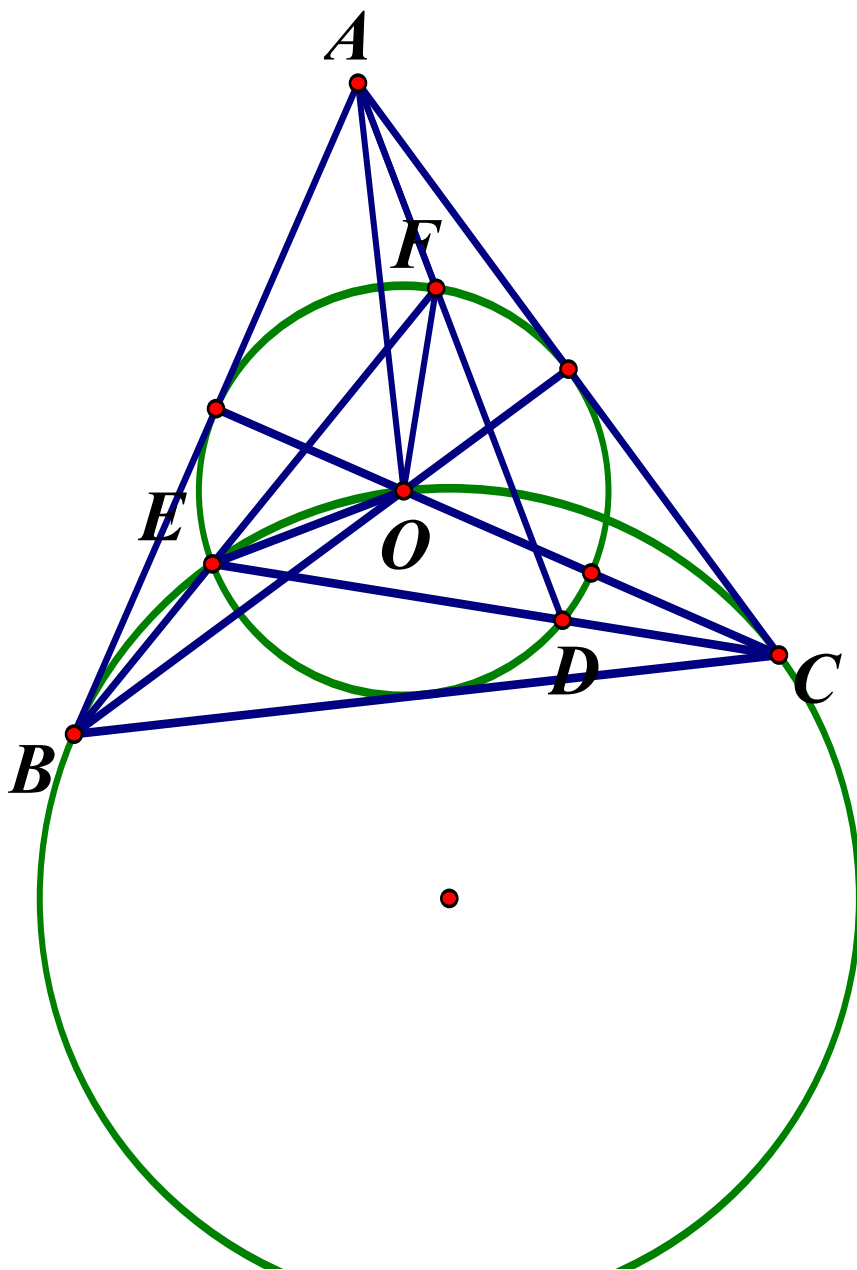
Vậy $2a, a+b$ và c là các số nguyên.

Bây giờ, giả sử $2a, a+b, c$ là các số nguyên. Khi đó, ta có :

$$P(x) = a(x^2 - x) + (a+b)x + c = 2a \cdot \frac{x(x-1)}{2} + (a+b)x + c$$

Luôn nhận giá trị nguyên với mọi số nguyên x , do $\frac{x(x-1)}{2}$ là số nguyên với mọi x nguyên

Bài 2. (3,0 điểm) Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (O) . Cung nhỏ OB của đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC cắt đường tròn (O) tại điểm E . Tia BE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F



d) Chứng minh rằng tia EO là tia phân giác của góc CEF

Do đường tròn (O) nội tiếp tam giác đều ABC nên $\angle BAC = \angle CBA = \angle ACB = 60^\circ$ và AO, BO, CO là các đường phân giác của tam giác ABC

Do tứ giác $OEBC$ nội tiếp nên $\angle OEF = \angle OCB = 30^\circ$ và $\angle OEC = \angle OBC = 30^\circ$

Suy ra $\angle OEF = \angle OEC$ nên EO là tia phân giác của $\angle CEF$

e) Chứng minh rằng tứ giác $ABOF$ nội tiếp

Vì tam giác OFB cân tại O nên $\angle OFB = \angle OFE = 30^\circ$

Do $\angle BAO = \angle BFO = 30^\circ$ nên tứ giác $ABOF$ nội tiếp

f) Gọi D là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE và đường tròn (O).

Chứng minh rằng ba điểm A, F, D thẳng hàng

Hai tam giác OED, OEF có $OE = OF = OD$ và $\angle OEF = \angle OED$ nên chúng bằng nhau

Suy ra $ED = EF$. Từ đó, tam giác DEF cân tại E. Mà $\angle DEF = 60^\circ$ nên tam giác này là tam giác đều. Bây giờ, với chú ý rằng tứ giác ABOF nội tiếp, ta có :

$$\angle AFB + \angle BFD = \angle AOB + \angle EFD = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

Vậy ba điểm A, F, D thẳng hàng

Bài 3. (2,0 điểm) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $ab = cd$. Chứng minh rằng số $N = a^{2022} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2022}$ là hợp số

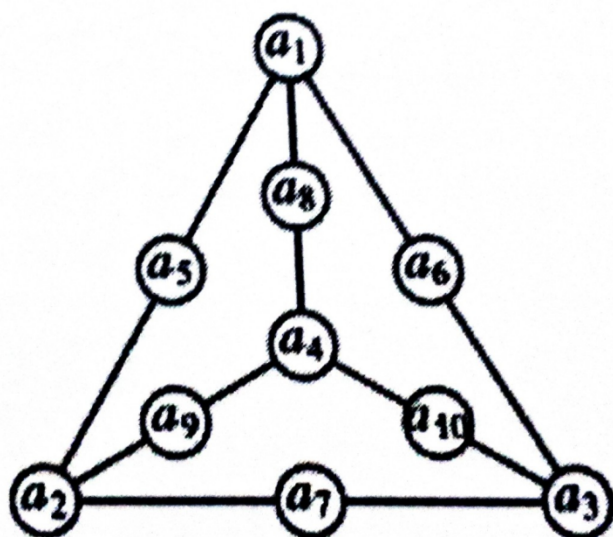
Từ giả thiết, ta có $\frac{a^{2022}}{c^{2022}} = \frac{d^{2022}}{b^{2022}} = \frac{x}{y}$ với x, y là các số nguyên dương nguyên tố cùng

nhau. Do $\frac{x}{y}$ là phân số tối giản nên tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho

$$a^{2022} = mx, c^{2022} = my, d^{2022} = nx, b^{2022} = ny. \text{ Từ đó, ta có :}$$

$N = mx + ny + my + nx = (m + n)(x + y)$ là hợp số, do $m + n; x + y$ là các số nguyên dương lớn hơn 1.

Bài 4. (2,0 điểm) Ta viết mười số 0, 1, 2, ..., 9 vào mười ô tròn trong hình bên dưới, mỗi số được viết đúng 1 lần. Sau đó, ta tính tổng của ba số trên mỗi đoạn thẳng để nhận được 6 tổng. Có hai không một cách viết 10 số như thế sao cho 6 tổng nhận được bằng nhau.



Giả sử tồn tại một cách điền số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Gọi các

số được điền là $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ như hình vẽ trên

Khi đó :

$$\begin{aligned} 6S &= (a_1 + a_5 + a_2) + (a_2 + a_7 + a_3) + (a_3 + a_6 + a_1) + (a_3 + a_{10} + a_4) \\ &\quad + (a_4 + a_9 + a_2) + (a_4 + a_8 + a_1) \\ &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}) \\ &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \\ &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 45 \end{aligned}$$

Suy ra 45 là số chẵn, mâu thuẫn. Vậy không tồn tại cách điền số thỏa mãn điều bài

Bài 5. (1,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng cho năm điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác tù có các đỉnh được lấy từ năm điểm đã cho

Xét năm điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Có thể thấy rằng bao lồi C của năm điểm này phải là một ngũ giác lồi hoặc một tứ giác lồi hoặc một tam giác

*Trường hợp 1: Bao lồi C của năm điểm này là một ngũ giác lồi. Không mất tính tổng quát, giả sử ngũ giác đó là $A_1A_2A_3A_4A_5$. Khi đó, ta có :

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \angle A_3A_4A_5 + \angle A_4A_5A_1 + \angle A_5A_1A_2 = 540^\circ$$

Suy ra , trong các góc $\angle A_1A_2A_3, \angle A_2A_3A_4, \angle A_3A_4A_5, \angle A_4A_5A_1, \angle A_5A_1A_2$ phải có một góc lớn hơn 90° , từ đó suy ra điều cần chứng minh

*Trường hợp 2: Bao lồi C của năm điểm này là một tứ giác lồi. Không mất tính tính tổng quát, giả sử tứ giác đó là $A_2A_3A_4A_5$. Khi đó , điểm A_1 phải nằm trong tứ giác $A_2A_3A_4A_5$. Ta có : $\angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1A_4 + \angle A_4A_1A_5 + \angle A_5A_1A_2 = 360^\circ$. Do đó , góc lớn nhất trong các góc $\angle A_2A_1A_3, \angle A_3A_1A_4, \angle A_4A_1A_5, \angle A_5A_1A_2$ phải có số đo không nhỏ hơn 90° . Nếu góc này có số đo bằng 90° thì cả 4 góc $\angle A_2A_1A_3, \angle A_3A_1A_4, \angle A_4A_1A_5, \angle A_5A_1A_2$ đều phải bằng nhau và bằng 90° . Suy ra $\angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1A_4 = 180^\circ$, tức là ba điểm A_2, A_1, A_4 thẳng hàng, mâu thuẫn. Như vậy, góc lớn nhất trong các góc $\angle A_2A_1A_3, \angle A_3A_1A_4, \angle A_4A_1A_5, \angle A_5A_1A_2$ phải là góc tù. Ta có điều phải chứng minh

*Trường hợp 3: Bao lồi C của năm điểm này là một tam giác. Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác đó là $A_2A_3A_4$. Khi đó hai điểm A_1 và A_5 phải nằm trong tam giác này, Suy ra $\angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1A_4 + \angle A_4A_1A_2 = 360^\circ$. Từ đó, góc lớn nhất trong ba góc $\angle A_2A_1A_3, \angle A_3A_1A_4, \angle A_4A_1A_2$ phải có số đo không nhỏ hơn $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ > 90^\circ$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Trong mặt phẳng cho 2022 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2018 tam giác tù mà mỗi tam giác tù đó có các đỉnh được lấy từ 2022 điểm đã cho

Ta sẽ chứng minh mệnh đề tổng quát bằng quy nạp theo n: Với $n+4$ điểm trên mặt phẳng cho trước, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng, tồn tại ít nhất n tam giác tù mà mỗi tam giác tù đó có các đỉnh được lấy từ $n+4$ điểm đã cho.

Theo kết quả câu a) mệnh đề đúng với $n=1$. Giả sử mệnh đề đúng với $n=k$ với k nguyên dương, ta sẽ chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n=k+1$. Xét $k+5$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{k+5}$ trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Khi đó, với năm điểm $A_{k+1}, A_{k+2}, A_{k+3}, A_{k+4}, A_{k+5}$ theo câu a) ta tìm được một tam giác tù có các đỉnh lấy được từ năm điểm này. Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác $A_{k+3}A_{k+4}A_{k+5}$ tù. Bỏ qua điểm A_{k+5} và xét $k+4$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{k+4}$. Theo giả thiết quy nạp, từ $k+4$ điểm đang xét, ta tìm được k tam giác tù có các đỉnh được lấy từ $k+4$ điểm này. Như vậy, từ $k+5$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{k+5}$, ta tìm được $k+1$ tam giác tù có các đỉnh được lấy từ $k+5$ điểm đang xét. Khẳng định cũng đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi n nguyên dương.