

Câu 1. (2,0 điểm)

a. Rút gọn biểu thức $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b. Cho hai hàm số $y = 2x^2$ và $y = 4x + m$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Câu 2. (2,5 điểm)

a. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x} = 3 + \sqrt{4x-8}$.

b. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 3xy = 12 \\ y^2 - 2y - xy = -4 \end{cases}$$

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho hình lăng trụ đứng, đáy là tam giác vuông, chiều cao bằng 6. Số đo ba cạnh của tam giác đáy là các số nguyên. Số đo diện tích toàn phần của lăng trụ bằng số đo thể tích của lăng trụ. Tính số đo ba cạnh tam giác đáy của lăng trụ.

Câu 4. (3,5 điểm)

Trên đường tròn tâm O đường kính AB lấy điểm C bất kì ($CA < CB$, C khác A). Gọi H là hình chiếu của C trên AB , I là trung điểm của CH . Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm F (F khác B). Qua điểm C kẻ đường thẳng vuông góc với CF , đường thẳng này cắt FB tại điểm K . Gọi P là trung điểm của BC .

a. Chứng minh $BI \cdot BF = BC^2$;

b. Chứng minh tứ giác $CPKI$ nội tiếp;

c. Chứng minh KF là tia phân giác của $\widehat{CKA}$;

d. Khi C di chuyển trên đường tròn (O) ($CA < CB$, C khác A), chứng minh đường thẳng CK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 < x < y \leq 8$ và $xy \leq 4x + 3y$. Chứng minh $x^2 + y^2 \leq 100$.

..... Hết

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
Câu 1 2,0đ	a. $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	$= \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$	0,25
	$= \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$	0,25
	$= \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$	0,25
	b. Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số: $2x^2 = 4x + m \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - m = 0$	0,25
	Để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 + 2m > 0 \Leftrightarrow m > -2$ (1)	0,25
	Để hai giao điểm có hoành độ dương thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta được: $-2 < m < 0$.	0,25
Câu 2 2,5đ	a. ĐK: $x \geq 2$	0,25
	Biến đổi được $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x} = \sqrt{4x-8} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{3x(x+1)} = 3\sqrt{4x-8}$	0,5
	$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện). KL: Phương trình có hai nghiệm: $x = 3, x = 8$.	0,25
	b. $\begin{cases} x^2 - 2x + 3xy = 12 \\ y^2 - 2y - xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = 9 \\ y^2 - 2y - xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-1)^2 = 3^2 \\ y^2 - 2y - xy = -4 \end{cases}$	0,25
	TH1: $\begin{cases} x+y=4 \\ y^2 - 2y - xy = -4 \end{cases}$. Giải được $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$	0,5
	TH2: $\begin{cases} x+y=-2 \\ y^2 - 2y - xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ y^2 = -2 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm. KL: Hệ có hai nghiệm là $(3;1)$ và $(2;2)$.	0,5
Câu 3 1,0đ	Gọi hai cạnh góc vuông của tam giác đáy là x, y , cạnh huyền là z ($x, y, z \in N^*$). Không mất tính tổng quát, giả sử $x \leq y$.	0,25

Ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 6(x + y + z) + xy = 3xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 & (1) \\ (x + y)^2 - 6(x + y) = z^2 + 6z & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (x + y)^2 - 6(x + y) + 9 = z^2 + 6z + 9 \Leftrightarrow (x + y - 3)^2 = (z + 3)^2$$

$$\Leftrightarrow z + 3 = |x + y - 3| \Leftrightarrow x + y + z = 0 \text{ (loại) hoặc } z = x + y - 6$$

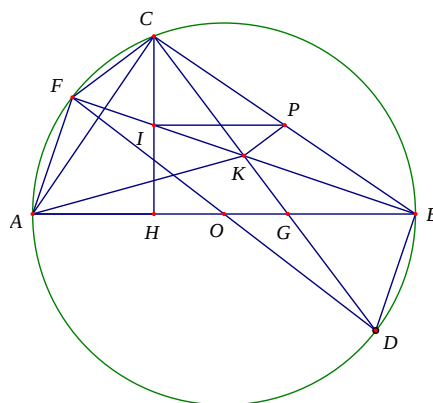
Thế vào (1) được $x^2 + y^2 = (x + y - 6)^2 \Leftrightarrow xy - 6x - 6y + 18 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 6)(y - 6) = 18.$$

Do $(x - 6); (y - 6)$ nguyên, $y - 6 \geq x - 6 > -6$ nên:

$x - 6$	1	2	3
$y - 6$	18	9	6
x	7	8	9
y	24	15	12
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	25	17	15

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác đáy là $(7; 24; 25); (8; 15; 17); (9; 12; 15)$.



Câu 4
3,5đ

a. ΔABC vuông tại C , đường cao $CH \Rightarrow \widehat{BCH} = \widehat{CAB}$, $\widehat{CAB} = \widehat{CFB}$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn $\widehat{CB}$) $\Rightarrow \widehat{BCI} = \widehat{BFC}$.

ΔBCI và ΔBFC có $\widehat{B}$ chung, $\widehat{BCI} = \widehat{BFC} \Rightarrow \Delta BCI \sim \Delta BFC$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BI} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow BC^2 = BI \cdot BF.$$

b. ΔCBH có IP là đường trung bình $\Rightarrow IP \parallel BH \Rightarrow \widehat{PIB} = \widehat{IBA}$.
 $\widehat{FBA} = \widehat{FCA}$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) cùng chắn $\widehat{CF}$)

$$\widehat{FCK} = \widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FCA} = \widehat{KCB}.$$

$\Rightarrow \widehat{PIK} = \widehat{PCK} \Rightarrow$ Tứ giác $CPKI$ nội tiếp.

c. $IP \parallel HB$, $HB \perp CI \Rightarrow \widehat{CIP} = 90^\circ$. Tứ giác $CIKP$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{CIP} = \widehat{CKP} = 90^\circ \text{ hay } KP \perp CK \text{ mà } CK \perp CF \Rightarrow KP \parallel CF.$$

ΔBCF có $PB = PC$, $PK \parallel CF \Rightarrow KB = KF$

	ΔCKP và ΔBFA có $\widehat{KCP} = \widehat{FBA}$, $\widehat{CKP} = \widehat{BFA} = 90^0 \Rightarrow \Delta CKP \simeq \Delta BFA$ $\Rightarrow \frac{CK}{CP} = \frac{BF}{BA}$	0,25
	$CP = \frac{1}{2}CB$, $BF = 2BK \Rightarrow \frac{CK}{CB} = \frac{BK}{BA}$, kết hợp với $\widehat{KCP} = \widehat{KBA}$ $\Rightarrow \Delta CKB \simeq \Delta BKA \Rightarrow \widehat{CKB} = \widehat{BKA} \Rightarrow \widehat{CKF} = \widehat{AKF}$	0,25
	d. Kẻ CK cắt AB tại G , cắt (O) tại D . Vì $\widehat{FCD} = 90^0 \Rightarrow FD$ là đường kính của (O) nên O là trung điểm của FD .	0,25
	ΔBDF có K là trung điểm của BF , O là trung điểm của $DF \Rightarrow G$ là trọng tâm của $\Delta BDF \Rightarrow G$ thuộc đoạn BO và $GB = \frac{2}{3}BO$.	0,25
	B, O cố định $\Rightarrow G$ cố định. Vậy CK đi qua G cố định.	0,25
Câu 5 1,0đ	Với $0 < x \leq 6$, và $0 < y \leq 8 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 100$ (1)	0,25
	Với $6 < x < y \leq 8 \Rightarrow 0 < y - x < 2 \Rightarrow (y - x)^2 < 2(y - x)$ $\Rightarrow x^2 + y^2 < 2xy + 2(y - x) \leq 8x + 6y - 2x + 2y = 6x + 8y$	0,25
	Có $(6x + 8y)^2 \leq (6^2 + 8^2)(x^2 + y^2) \Rightarrow 6x + 8y \leq 10\sqrt{x^2 + y^2}$	0,25
	$\Rightarrow x^2 + y^2 < 10\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 < 100$ (2). (1), (2) suy ra điều phải chứng minh.	0,25

Những chú ý khi chấm thi:

- Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới cho điểm tối đa.
- Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết.
- Có thể chia nhỏ điểm thành phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm thống nhất toàn bài là tổng số điểm các bài đã chấm, **không làm tròn**.

..... Hết