

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH KHÁNH HÒA
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN
NĂM HỌC: 2024 - 2025
Môn thi: TOÁN CHUYÊN

Ngày thi 04/05/2024

Thời gian làm bài: **150 phút** (Không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (2,00 điểm)

a) Giải phương trình $(x+2)^2 - x - 6 = \sqrt{x^2 + 3x}$

b) Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa $y\sqrt{25-y^2} + x\sqrt{25-x^2} = 2xy (0 < x, y < 5)$. Chứng minh $x^2 + y^2 = 25$.

Bài 2. (2,00 điểm)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5 \\ \left(xy + \frac{1}{xy}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{25}{4} \end{cases}$$

2. Biết phương trình $x^2 + 2x - m - m^2 = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi tham số m . Gọi $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3), \dots, (\alpha_{25}, \beta_{25})$ tương ứng là 2 nghiệm của phương trình (1) khi m nhận các giá trị lần lượt là $1; 2; 3; \dots; 25$. Tính $T = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{25}} + \frac{1}{\beta_{25}}$.

Bài 3. (1,50 điểm)

1. Cho $p, q (p > q > 5)$ là 2 số nguyên tố. Chứng minh $p^8 - q^4$ chia hết cho 240.

2. Tìm tất cả số nguyên dương n và số nguyên tố p thỏa $n^{2044} + 4n + p^2$ chia hết cho np .

Bài 4. (1,50 điểm)

1. Tìm tất cả số thực $k > 0$ sao cho $\frac{x}{xy+2} \leq \frac{1}{k} \left(x + \frac{2}{y}\right)$ luôn đúng với mọi $x, y > 0$.

2. Cho $a, b, c, x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 4$.

Chứng minh: $\frac{x}{ax+2} + \frac{y}{by+2} + \frac{z}{cz+2} \leq 1$

Bài 5. (2,50 điểm)

Cho A, B là hai điểm cố định trên đường tròn (O, R) , C là điểm chính giữa cung AB và M là điểm di động trên dây cung $AB (M \neq A, M \neq B)$. Tia CM cắt (O, R) tại $D (D \neq C)$.

a) Chứng minh $AC^2 = CM \cdot CD$ và AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM .

b) Cho $R = 5$ cm, $AB = 6$ cm, tính $R_1 + R_2$, với R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM và tam giác BDM

Bài 6. (0,50 điểm)

Cho đa giác $A_1 A_2 \dots A_{2024}$ là đa giác đều 2024 đỉnh, trong đó đỉnh A_{2009} được tô đỏ, các đỉnh còn lại được tô xanh.

Đổi màu các đỉnh của đa giác theo quy tắc:

Mỗi lần chọn 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật rồi đổi màu đồng thời 4 đỉnh ấy (đỏ thành xanh và xanh thành đỏ).

Hỏi sau một số hữu hạn lần đổi màu như vậy, có thể thu được kết quả đỉnh A_{2009} và A_{997} cùng màu hay không? Vì sao?

-----HẾT-----

Đề thi này có 01 trang;

Giám thị không giải thích gì thêm.

Lời giải tham khảo

Câu 1: Đặng Mai Quốc Khánh

Câu 2: Nguyễn Khắc Hoàng Lâm

Câu 3: Trần Đình Cẩn

Câu 4: Trần Đình Cẩn

Câu 5: Nguyễn Khắc Hoàng Lâm

Câu 6: Nguyễn Bá Vinh

Câu 1 (2 điểm)

a) Giải phương trình $(x+2)^2 - x - 6 = \sqrt{x^2 + 3x}$

b) Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa $y\sqrt{25-y^2} + x\sqrt{25-x^2} = 2xy (0 < x, y < 5)$. Chứng minh $x^2 + y^2 = 25$.

Hướng dẫn

1. $(x+2)^2 - x - 6 = \sqrt{x^2 + 3x}$ (Điều kiện: $x \leq -3$ hoặc $x \geq 0$)

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - x - 6 = \sqrt{x^2 + 3x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x} - 2 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x} (t \geq 0)$

Thay vào (1) ta được: $t^2 - t - 2 = 0$

Vì $a - b + c = 0$ nên $t = -1$ (loại do $t \geq 0$) hoặc $t = 2$ (nhận).

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \text{ (nhận) hoặc } x = 1 \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-4; 1\}$.

2. Cách 1:

$$y\sqrt{25-y^2} + x\sqrt{25-x^2} = 2xy \quad (0 < x, y < 5)$$

$$\Leftrightarrow y(\sqrt{25-y^2} - x) + x(\sqrt{25-x^2} - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(25-x^2-y^2)}{\sqrt{25-y^2} + x} + \frac{x(25-x^2-y^2)}{\sqrt{25-x^2} + y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (25-x^2-y^2) \left(\frac{y}{\sqrt{25-y^2} + x} + \frac{x}{\sqrt{25-x^2} + y} \right) = 0$$

Vì $0 < x, y < 5$ nên $\frac{y}{\sqrt{25-y^2} + x} + \frac{x}{\sqrt{25-x^2} + y} > 0$

Do đó $25-x^2-y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$ (dpcm)

Cách 2:

Giả sử $x^2 + y^2 < 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 25-x^2 > y^2 \\ 25-y^2 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{25-x^2} > y \\ \sqrt{25-y^2} > x \end{cases} \quad (\text{Do } 0 < x, y < 5)$

Khi đó: $2xy = y\sqrt{25-y^2} + x\sqrt{25-x^2} > yx + xy = 2xy$ (vô lý)

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai. Do đó: $x^2 + y^2 \geq 25$ (1)

Chứng minh tương tự ta có: $x^2 + y^2 \leq 25$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2 + y^2 = 25$ (dpcm)

Câu 2

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5 \\ \left(xy + \frac{1}{xy}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{25}{4} \end{cases}$$

2. Biết phương trình $x^2 + 2x - m - m^2 = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi tham số m .
Gọi $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3), \dots, (\alpha_{25}, \beta_{25})$ tương ứng là 2 nghiệm của phương trình (1)

khi m nhận các giá trị lần lượt là $1; 2; 3; \dots; 25$. Tính $T = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{25}} + \frac{1}{\beta_{25}}$.

Hướng dẫn

Câu 2.1. Điều kiện xác định: $x \neq 0, y \neq 0$

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5 \\ \left(xy + \frac{1}{xy}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + \frac{1}{xy} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 5 \\ \left(xy + \frac{1}{xy}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \frac{5}{2} \\ \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2y^2 - 5xy + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} xy = 2 \\ (x+y)^2 = 5 + 2 \cdot 2 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ (x+y)^2 = \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} xy = 2 \\ x+y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 2 \\ x+y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x+y = \frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x+y = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Câu 2.2.

$$x^2 + 2x - m - m^2 = 0$$

Theo bài ra, phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m , áp dụng vi-et ta có
 $x_1 + x_2 = -2$

$$x_1 x_2 = -m^2 - m$$

Và khi $m \in \{1, 2, 3, \dots, 25\}$ thì 0 không phải là nghiệm của phương trình

$$\text{Do đó: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-2}{-m^2 - m} = \frac{2}{m(m+1)} = 2 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right)$$

Suy ra:

$$T = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} \dots + \frac{1}{\alpha_{2s}} + \frac{1}{\beta_{2s}} = 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + 2 \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{26} \right)$$

$$T = 2 \left(1 - \frac{1}{26} \right) = \frac{50}{26}$$

Câu 3 (1,5 điểm)

1. Cho $p, q (p > q > 5)$ là 2 số nguyên tố. Chứng minh $p^8 - q^4$ chia hết cho 240.
2. Tìm tất cả số nguyên dương n và số nguyên tố p thỏa $n^{2024} + 4n + p^2$ chia hết cho np .

Hướng dẫn

1. Ta sẽ chứng minh $p^8 - q^4$ chia hết cho 3, 5, 16.

Thật vậy, vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên $p \equiv 1, 2 \pmod{3}$ và $p \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$ *

$$\text{Do đó: } p^2 \equiv 1^2, 2^2 \equiv 1, 4 \equiv 1 \pmod{3}; p^4 \equiv 1^4, 2^4, 3^4, 4^4 \equiv 1, 16, 81, 256 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\text{Tương tự: } q^2 \equiv 1 \pmod{2} \text{ và } q^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow p^8 \equiv q^4 \equiv 1 \pmod{3} \text{ và } p^8 \equiv q^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow p^8 - q^4 \text{ chia hết cho } 3, 5. (1)$$

$$\text{Vì } p \text{ là số nguyên tố lớn hơn 5 nên } p \text{ lẻ, do đó } p^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

Thật vậy, ta có $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp, do đó một trong hai số này chia hết cho 4. Vì vậy, $p^2 - 1$ chia hết cho 8.

$$\text{Từ đây ta có thể viết } p^2 = 8k + 1 (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow p^4 = 64k^2 + 16k + 1 \equiv 1 \pmod{16}$$

$$\text{Tương tự: } q^4 \equiv 1 \pmod{16} \Rightarrow p^8 \equiv q^4 \equiv 1 \pmod{16}$$

$$\Rightarrow p^8 - q^4 \text{ chia hết cho } 16. (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $p^8 - q^4$ chia hết cho 240.

2. Ta có: $n^{2024} + 4n + p^2 : np \Rightarrow n^{2024} + 4n + p^2 : n \Rightarrow p^2 : n$

$$\Rightarrow n \in \{1, p, p^2\}.$$

TH1: $n=1 \Rightarrow 5+p^2 : p \Rightarrow 5 : p \Rightarrow p=5$, thử lại thấy thỏa mãn.

TH2: $n=p \Rightarrow p^{2024} + 4p + p^2 : p^2 \Rightarrow 4p : p^2 \Rightarrow 4 : p \Rightarrow p=2 \Rightarrow n=p=2$, thử lại thấy thỏa mãn.

TH3: $n=p^2 \Rightarrow p^{4048} + 5p^2 : p^3 \Rightarrow 5p^2 : p^3 \Rightarrow 5 : p \Rightarrow p=5 \Rightarrow n=p^2=25$, thử lại thấy thỏa mãn.

$$\text{Vậy } (n, p) \in \{(1, 5); (2, 2); (25, 5)\}$$

Chú ý : *ở đây quy ước $a \equiv b, c \pmod{d}$ tức là a có thể đồng dư với b, c modulo d .

Câu 4 (1,5 điểm)

1. Tìm tất cả số thực $k > 0$ sao cho $\frac{x}{xy+2} \leq \frac{1}{k} \left(x + \frac{2}{y} \right)$ luôn đúng với mọi $x, y > 0$.

2. Cho $a, b, c, x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 4$. Chứng minh:

$$\frac{x}{ax+2} + \frac{y}{by+2} + \frac{z}{cz+2} \leq 1$$

Hướng dẫn

1. Ta có: $\frac{(xy+2)^2}{xy} = \frac{x^2y^2 + 4xy + 4}{xy} = xy + \frac{4}{xy} + 4 \geq 2\sqrt{4} + 4 = 8$ (AM-GM).

Dấu " $=$ " xảy ra khi $xy = 2$.

$$\text{Do đó: } \frac{x}{xy+2} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{xy+2}{y} \right) = \frac{1}{8} \left(x + \frac{2}{y} \right); \forall x, y > 0$$

Vì $\frac{x}{xy+2} \leq \frac{1}{k} \left(x + \frac{2}{y} \right)$ luôn đúng với mọi $x, y > 0$ nên $0 < k \leq 8$.

$$\text{Áp dụng câu 4.1: } \frac{x}{ax+2} + \frac{y}{by+2} + \frac{z}{cz+2} \leq \frac{1}{8} \left(x + \frac{2}{a} + y + \frac{2}{b} + z + \frac{2}{c} \right) = \frac{1}{8} (4 + 4) = 1.$$

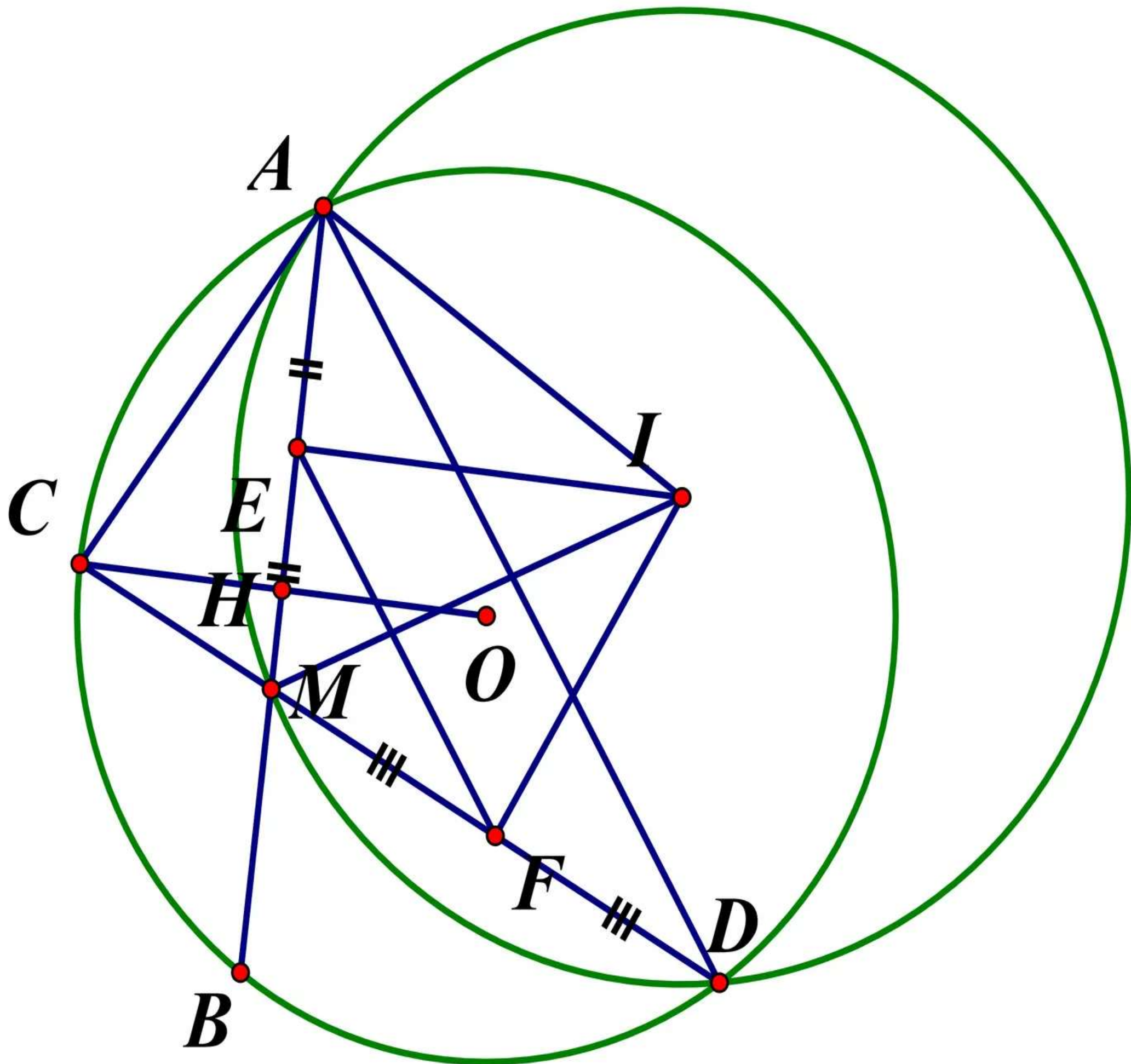
Dấu " $=$ " xảy ra khi $ax = by = cz = 2$

Bài 5. (2,50 điểm)

Cho A, B là hai điểm cố định trên đường tròn (O, R) , C là điểm chính giữa cung AB và M là điểm di động trên dây cung AB ($M \neq A, M \neq B$). Tia CM cắt (O, R) tại D ($D \neq C$).

- a) Chứng minh $AC^2 = CM \cdot CD$ và AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM .
- b) Cho $R = 5 \text{ cm}$, $AB = 6 \text{ cm}$, tính $R_1 + R_2$, với R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM và tam giác BDM

Hướng dẫn



Câu a

$$\begin{aligned}
 \angle CAB &= \frac{1}{2} \text{SđCB} = \frac{1}{4} \text{SđAB}; \angle ADC = \frac{1}{2} \text{SđAC} = \frac{1}{4} \text{SđAB} \\
 &\Rightarrow \angle CAB = \angle ADC \\
 &\Rightarrow \triangle CAM \sim \triangle CDA (g \cdot g) \\
 &\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CM}{CA} \Leftrightarrow CA^2 = CD \cdot CM
 \end{aligned}$$

Vẽ 2 đường trung trực của AM, DM cắt nhau tại I . Khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AM và DM .

Suy ra $EF \parallel AD$, nên $\angle EFM = \angle ADM$ (1)

$$\text{Mà } ADM = CAM, (\triangle CAM \sim \triangle CDA) (2)$$

Lại có tứ giác EMFI là tứ giác nội tiếp do $\hat{E} + \hat{F} = 90^\circ$, nên $EFM = EIM$ (3)

Hơn nữa $EIM = AIE$ (EI là trung trực của AM) (

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra: $CAM = AIE$

Do vậy : $CAM + IAM = AIE + IAM \Leftrightarrow CAI = 90^\circ$ hay CA vuông góc với AI

Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM.

Câu b

Nối OC, vì C là điểm chính giữa cung nên OC là đường trung trực của AB. Gọi H là giao điểm của OC và AB

$$AH = \frac{AB}{2} = 3; OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$CH = OC - OH = 5 - 4 = 1$$

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\sin CAH = \frac{CH}{AC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$R_1 = IA = \frac{AE}{\sin AIE} = \frac{AE}{\sin CAH} = \frac{AM\sqrt{10}}{2}$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD và có bán kính là $R_2 = \frac{BM\sqrt{10}}{2}$

$$\text{Nhu vậy } R_1 + R_2 = \frac{(AM + BM)\sqrt{10}}{2} = \frac{AB\sqrt{10}}{2} = 3\sqrt{10} \text{ (cm)}$$

Bài 6. (0,50 điểm)

Cho đa giác $A_1, A_2, \dots, A_{2024}$ là đa giác đều 2024 đỉnh, trong đó đỉnh A_{2009} được tô đỏ, các đỉnh còn lại được tô xanh. Đổi màu các đỉnh của đa giác theo quy tắc: Mỗi lần chọn 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật rồi đổi màu đồng thời 4 đỉnh ấy (đỏ thành xanh và xanh thành đỏ).

Hỏi sau một số hữu hạn lần đổi màu như vậy, có thể thu được kết quả đỉnh A_{2000} và A_{997} cùng màu hay không? Vì sao?

Hướng dẫn

Vì $A_1 A_2 \dots A_{2024}$ là đa giác đều nên đa giác này nội tiếp đường tròn đường kính tâm O, Gọi A_k là điểm đối xứng với A_1 qua tâm O :

- Đường kính $A_1 A_k$ chia đa giác đều $A_1 A_2 \dots A_{2024}$ thành 2 phần bằng nhau, số lượng các đỉnh 2 bên là 1011 đỉnh,
- Suy ra, $A_k \equiv A_{1013}$

Từ đó, ta có quy luật về đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều $A_1 A_2 \dots A_{2024}$:

- A_1 đối xứng với A_{1013} qua O : đường kính $A_1 A_{1013}$
- Đường kính $A_2 A_{1014}$

...

- Đường kính $A_k A_{k+1012}$

Suy ra: A_{m7} đối xứng với A_{2009} qua tâm O,

Nghĩa là, một hình chữ nhật có đỉnh A_{997} thì A_{2009} cũng là đỉnh của hình chữ nhật đó,

Mà ban đầu, A_{997} được tô màu xanh, A_{2009} được tô màu đỏ

Vậy theo quy tắc đổi màu như trên thì A_{2009} và A_{997} không thể cùng màu sau một số hữu hạn lần đổi màu.