

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn thi: TOÁN (Ngày thứ tư)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(1-ab)(1-bc)} + \sqrt{(1-bc)(1-ca)} + \sqrt{(1-ca)(1-ab)} \geq 2.$$

Bài 6. Cho số nguyên dương $k \geq 3$. Kí hiệu $f(k)$ là số các số nguyên dương m sao cho tồn tại bộ số nguyên dương nguyên tố cùng nhau $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ thỏa mãn $m \mid a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh rằng $k < f(k) < 2^k$.

Bài 7. Cho n là số nguyên dương, $n \geq 4$. Trong mặt phẳng xét n điểm phân biệt, sao cho 2 điểm bất kì trong chúng hoặc không được nối với nhau hoặc được nối với nhau chỉ bằng 1 cạnh và bất kì điểm nào trong chúng được nối với ít nhất 1 điểm khác trong n điểm đó. Biết rằng có ít nhất $\left\lceil \frac{n(n+2)}{4} \right\rceil$ cạnh giữa n điểm đó. Chứng minh rằng tồn tại $k+1$ điểm ($k \geq 3$) trong n điểm đó, kí hiệu là $A_1, \dots, A_{k+1}$ sao cho A_{k+1} được nối với $A_1, \dots, A_k$ và A_1 nối với A_2 , A_2 với $A_3, \dots$, A_i nối với A_{i+1} ($1 \leq i \leq k-1$), ..., A_{k-1} nối với A_k và A_k nối với A_1 .

(Chú ý: với $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất mà nó lớn hơn hoặc bằng x .)

———— HẾT ————

ĐÁP ÁN (ngày 4)

Bài 5. (7đ) Sử dụng điều kiện giả thiết và bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}\frac{bc}{1-bc} &= \frac{bc}{a^2+b^2+c^2-bc} = \frac{2bc}{2a^2+b^2+c^2+(b-c)^2} \\ &\leq \frac{2bc}{2a^2+b^2+c^2} \leq \frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} \right).\end{aligned}$$

Tương tự

$$\frac{ca}{1-ca} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2}{b^2+a^2} \right), \quad \frac{ab}{1-ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{c^2+a^2} + \frac{b^2}{c^2+b^2} \right).$$

Cộng lại theo vế ta được

$$\frac{ab}{1-ab} + \frac{bc}{1-bc} + \frac{ca}{1-ca} \leq \frac{3}{2}.$$

Kết quả này tương đương

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}.$$

Mặt khác, lại có

$$\begin{aligned}\frac{9}{2} &\geq \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{(1-ab)(1-bc)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-bc)(1-ca)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-ca)(1-ab)}} \\ &\geq \frac{9}{\sqrt{(1-ab)(1-bc)} + \sqrt{(1-bc)(1-ca)} + \sqrt{(1-ca)(1-ab)}}.\end{aligned}$$

Hệ quả là

$$\sqrt{(1-ab)(1-bc)} + \sqrt{(1-bc)(1-ca)} + \sqrt{(1-ca)(1-ab)} \geq 2$$

như yêu cầu.

Bài 6. (7đ) Trước hết ta chứng minh $f(k) > k$. Thật vậy: giả sử $1 \leq m \leq k$, ta chọn $a_1 = \dots = a_m = 1, a_{m+1} = \dots = a_k = m$ thì $(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1$ và $m|a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n$ với mọi số nguyên dương n .

Nếu k lẻ ta chọn $a_1 = \dots = a_{k-1} = 1, a_k = k+1$ thì $a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n = k-1 + (k+1)^n$; $k \nmid k-1$ nên $2k|a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n$ với mọi số nguyên dương n .

Nếu k chẵn, ta chọn $a_1 = \dots = a_{k-1} = 1, a_k = k - 1$ thì $a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n = k - 1 + (k - 1)^n : k - 1, : 2$ nên $2(k - 1) | a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n$ với mọi số nguyên dương n và $2(k - 1) > k$ (do $k \geq 3$).

Như vậy $f(k) \geq k + 1$.

Tiếp theo ta chứng minh $f(k) < 2^k$.

Giả sử m có ước nguyên tố $p > k$. Gọi t là số các số không chia hết cho p trong k số $a_1, a_2, \dots, a_k$. Vì $(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1$ nên có ít nhất một số không chia hết cho p trong k số $a_1, a_2, \dots, a_k$. Suy ra $1 \leq t \leq k$. Khi đó theo định lý Fermat ta có $a_1^{p-1} + a_2^{p-1} + \dots + a_k^{p-1} \equiv t \pmod{p}$. Do đó $p | t$ -vô lý. Vậy mọi ước nguyên tố của m đều không vượt quá k . Giả sử $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ là tất cả các số nguyên tố không vượt quá k . Gọi α_i là số nguyên dương lớn nhất sao cho $p_i^{\alpha_i} \leq k$ với mỗi $i = 1, \dots, r$. Ta chứng minh $m \nmid p_i^{\alpha_i+1}$ với mỗi $i = 1, \dots, r$. Thật vậy, giả sử $m \mid p_i^{\alpha_i+1}$. Gọi q là số các số không chia hết cho p_i trong k số $a_1, a_2, \dots, a_k$. Lấy $n = \alpha_i \varphi(p_i^{\alpha_i+1}) > \alpha_i$ thì $a_j^n \equiv p_i^{\alpha_i+1}$ nếu $a_j \not\equiv p_i$. Theo định lý Euler, ta có $a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n \equiv q \pmod{p_i^{\alpha_i+1}}$. Suy ra $q \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i+1}}$ -vô lý vì $1 \leq q \leq k < p_i^{\alpha_i+1}$. Từ đó suy ra m phải có dạng $m = p_1^{x_1} \dots p_r^{x_r}$ với $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{N}$ và $x_i \leq \alpha_i$ với mọi $i = 1, \dots, r$. Suy ra $f(k) \leq (1 + \alpha_1) \dots (1 + \alpha_r) = T$. Mặt khác, theo khai triển Newton thì $1 + \alpha_i \leq (1 + 1)^{\alpha_i} = 2^{\alpha_i} \leq p_i^{\alpha_i}$ với mọi $i = 1, \dots, r$. Gọi s ($1 \leq s \leq r$) là chỉ số lớn nhất mà $p_s^2 \leq k$. Khi đó $p_i^2 > k$ với mọi $s < i \leq r$. Suy ra $\alpha_i = 1$ với mọi $s < i \leq r$. Do đó

$$T \leq p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} 2^{r-s} \leq k^s 2^{r-s} = \left(\frac{k}{2}\right)^s 2^r$$

Ta thấy từ 1 đến số nguyên dương h có đúng $\left[\frac{h+1}{2}\right]$ số lẻ, trong đó 1 không phải số nguyên tố và 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất nên có không quá $\left[\frac{h+1}{2}\right]$ số nguyên tố không vượt quá h . Hơn nữa s là số các số nguyên tố không vượt quá $\sqrt{k}$ và r là số các số nguyên tố không vượt quá k . Do đó

$$T \leq \left(\frac{k}{2}\right)^{\left[\frac{\sqrt{k}+1}{2}\right]} 2^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \leq \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{\sqrt{k}+1}{2}} 2^{\frac{k+1}{2}}$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x} \ln 2 - \ln x$ trên khoảng $(16, +\infty)$, ta có $g'(x) = \frac{\sqrt{x} \ln 2 - 2}{2x} \geq \frac{4 \ln 2 - 2}{2x} > 0$. Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $(16, +\infty)$. Suy ra $g(x) \geq g(16) = 0$ với mọi $x \geq 16$. Do đó với $k \geq 16$ thì $\sqrt{k} \ln 2 \geq \ln k$ hay $\sqrt{k} \geq \frac{\ln k}{\ln 2} = \log_2 k$ hay $k \leq 2^{\sqrt{k}}$. Khi đó

$$T \leq (2^{\sqrt{k}-1})^{\frac{\sqrt{k}+1}{2}} 2^{\frac{k+1}{2}} = 2^{\frac{k-1}{2}} 2^{\frac{k+1}{2}} = 2^k$$

Dấu "=" không đồng thời xảy ra.

Với $k = 3$ thì $T = (1 + 1)(1 + 1) = 4 < 2^3$

Với $k = 4$ thì $T = (2 + 1)(1 + 1) = 6 < 2^4$

Với $5 \leq k \leq 7$ thì $T = (2 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 24 < 2^5 \leq 2^k$

Với $8 \leq k \leq 15$ thì $T = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 192 < 2^8 \leq 2^k$

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $f(k) < 2^k$.

Bài 7. (6đ) It is a graph problem: a graph of n vertices with at least $\left\lceil \frac{n(n+2)}{4} \right\rceil$ edges, then there exists a wheel.

Denote the vertices to be $v_1, \dots, v_n$ and the corresponding degree $d_1, \dots, d_n$. Let E be the total number of edges.

Let e_k be the number edge uv such that v_k is connected to both u and v . Assume that G contains no wheel, then $e_k \leq d_k - 1$. Each such edge uv belongs to a triangle.

Taking sum over the number of such edge uv , we have

$$3T \leq 2E - n$$

On the other hand, for each edge uv , the number of triangles having uv as an edge is $\frac{1}{3}[d(u) + d(v) - n]$. Taking the sum over set of edge uv

$$T \geq \sum_{uv} \frac{1}{3}[d(u) + d(v) - n] = \frac{1}{3} \left[\sum_u d(u)^2 - nE \right] \geq \frac{4E}{3n} \left(E - \frac{n^2}{4} \right).$$

Comparing 2 inequalities

$$\frac{E}{n} \left(E - \frac{n^2}{4} \right) \leq 2E - n.$$

It follows that

$$2E \leq \frac{n(n+2)}{4} + n \sqrt{\left[\frac{n+4}{4} \right]^2 - 1} < 2 \frac{n(n+2)}{4}$$

Then we are done.