

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - 1$ với $x > 0, x \neq 1$. Rút gọn A và chứng minh $B > A$.

b) So sánh $\sqrt{24} + \sqrt{26}$ và 10.

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m-1)x + m + 4$ (m là tham số). Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm nằm về 2 phía của trục tung.

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{43-x} = x-1$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{x}{x-y} = \frac{-1}{2} \\ 2y - \frac{y}{x-y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 4. (1,5 điểm)

a) Chứng minh rằng tổng các bình phương của 6 số nguyên liên tiếp không thể là số chính phương.

b) Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2y + 2xy + y = 32x$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD và điểm E trên cạnh BC biết $AB = 4\text{cm}$, $BE = \frac{3}{4}BC$. Tia Ax vuông góc với AE tại A cắt tia CD tại F.

a) Tính diện tích $\triangle AEF$

b) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng EF, tia AI cắt CD tại K. Chứng minh: $AE^2 = KF \cdot CF$

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho $(O; R)$ và điểm M sao cho $OM = 2R$. Kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Trên đoạn thẳng AB lấy điểm I (Với $AI < BI$ và I khác A). Qua I vẽ dây CD sao cho $IC = ID$ và C thuộc cung nhỏ AB. Tiếp tuyến của (O) tại C cắt OI tại Q. Chứng minh:

a) Tứ giác OCQD nội tiếp được đường tròn.

b) $\triangle AMB$ là tam giác đều.

c) $OQ \perp MQ$

Câu 7. (1,0 điểm)

Cho số thực x thỏa mãn $1 \leq x \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{3+x}{x} + \frac{6-x}{3-x}$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - 1$ với $x > 0, x \neq 1$. Rút gọn A và chứng minh $B > A$.

b) So sánh $\sqrt{24} + \sqrt{26}$ và 10.

Lời giải

a) Với $x > 0, x \neq 1$. Ta có:
$$A = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1$$

và
$$B = \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - 1 = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} - 1 = (x-\sqrt{x}+1) - 1 = x-\sqrt{x}$$

Ta lại có: $B-A = x-\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1) = x-2\sqrt{x}+1 = (\sqrt{x}-1)^2 > 0$ với $x > 0, x \neq 1$.

$\Rightarrow B > A$ (đpcm)

b) Ta có: $(\sqrt{24} + \sqrt{26})^2 = 24 + 26 + 2\sqrt{24 \cdot 26} = 50 + 2\sqrt{624} < 50 + 2\sqrt{625} = 100 = 10^2$
 $\Rightarrow \sqrt{24} + \sqrt{26} < 10$

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m-1)x + m + 4$ (m là tham số). Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm nằm về 2 phía của trục tung.

Lời giải

Xét PT hoành độ giao điểm: $x^2 = (m-1)x + m + 4 \Leftrightarrow x^2 - (m-1)x - m - 4 = 0 (*)$

Ta có: $\Delta = (m-1)^2 - 4(-m-4) = m^2 - 2m + 1 + 4m + 16 = (m^2 + 2m + 1) + 16 = (m+1)^2 + 16 > 0 \forall m$

$\Rightarrow$ pt (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt hay (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\forall m$

Theo Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 x_2 = -m-4 \end{cases}$$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm nằm về 2 phía của trục tung thì pt (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt trái dấu hay:
 $-m-4 < 0 \Leftrightarrow m > -4$

Câu 3. (1,5 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{43-x} = x-1$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{x}{x-y} = \frac{-1}{2} \\ 2y - \frac{y}{x-y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Lời giải

a) ĐK: $43 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 43$

Phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 43-x = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 43-x = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 43 \\ x^2 - x - 42 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 43 \\ (x-7)(x+6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7$$

b) ĐK: $x \neq y$

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{2x}{x-y} = -1 \\ 4y - \frac{2y}{x-y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x-y) + 2x = -1(x-y) & (1) \\ 4y(x-y) - 2y = 3(x-y) & (2) \end{cases}$$

Cộng vế với vế của (1) với (2) ta được: $2x(x-y) + 2x + 4y(x-y) - 2y = 2(x-y)$

$$\Leftrightarrow 2(x-y)(x+2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 0 \\ x+2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & (KTM) \\ x = -2y & (TM) \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -2y \Rightarrow -2y + \frac{-2y}{-3y} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{7}{12} \Rightarrow x = \frac{-7}{6}$$

$$\text{Thử lại ta thấy} \begin{cases} x = \frac{-7}{6} \\ y = \frac{7}{12} \end{cases} (TM)$$

$$\text{Vậy hệ pt có nghiệm là:} \begin{cases} x = \frac{-7}{6} \\ y = \frac{7}{12} \end{cases}$$

Câu 4. (1,5 điểm)

a) Chứng minh rằng tổng các bình phương của 6 số nguyên liên tiếp không thể là số chính phương.

b) Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2y + 2xy + y = 32x$

Lời giải

a) Giả sử 6 số nguyên liên tiếp lần lượt là: $x; x+1; x+2; x+3; x+4; x+5$ ($x \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 + (x+5)^2 \\ &= x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 + x^2 + 10x + 25 \\ &= x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 + x^2 + 10x + 25 \\ &= 6x^2 + 30x + 55 \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có: } x^2y + 2xy + y = 32x \Leftrightarrow y(x^2 + 2x + 1) = 32x \Leftrightarrow y = \frac{32x}{(x+1)^2}$$

Do:

$$\begin{aligned} x; y \in \mathbb{Z}^+ &\Rightarrow 32x : (x+1)^2 \Rightarrow 32x(x+2) : (x+1)^2 \Rightarrow 32x^2 + 64x + 32 - 32 : (x+1)^2 \Rightarrow 32 : (x+1)^2 \\ &\Rightarrow (x+1)^2 \in U(32) = \{1; 2; 4; 8; 16; 32\} \Rightarrow (x+1)^2 \in \{4; 16\} \text{ (Vì: } (x+1)^2 > 1 \text{ và là số chính phương)} \end{aligned}$$

$$\text{TH1: } (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (TM)} \\ x=-3 \text{ (KTM)} \end{cases} \Rightarrow y=8 \text{ (TM)}$$

$$\text{TH2: } (x+1)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ (TM)} \\ x=-5 \text{ (KTM)} \end{cases} \Rightarrow y=6 \text{ (TM)}$$

Vậy nghiệm của pt là: $(x; y) = (1; 8); (3; 6)$

Câu 5. (1,0 điểm)

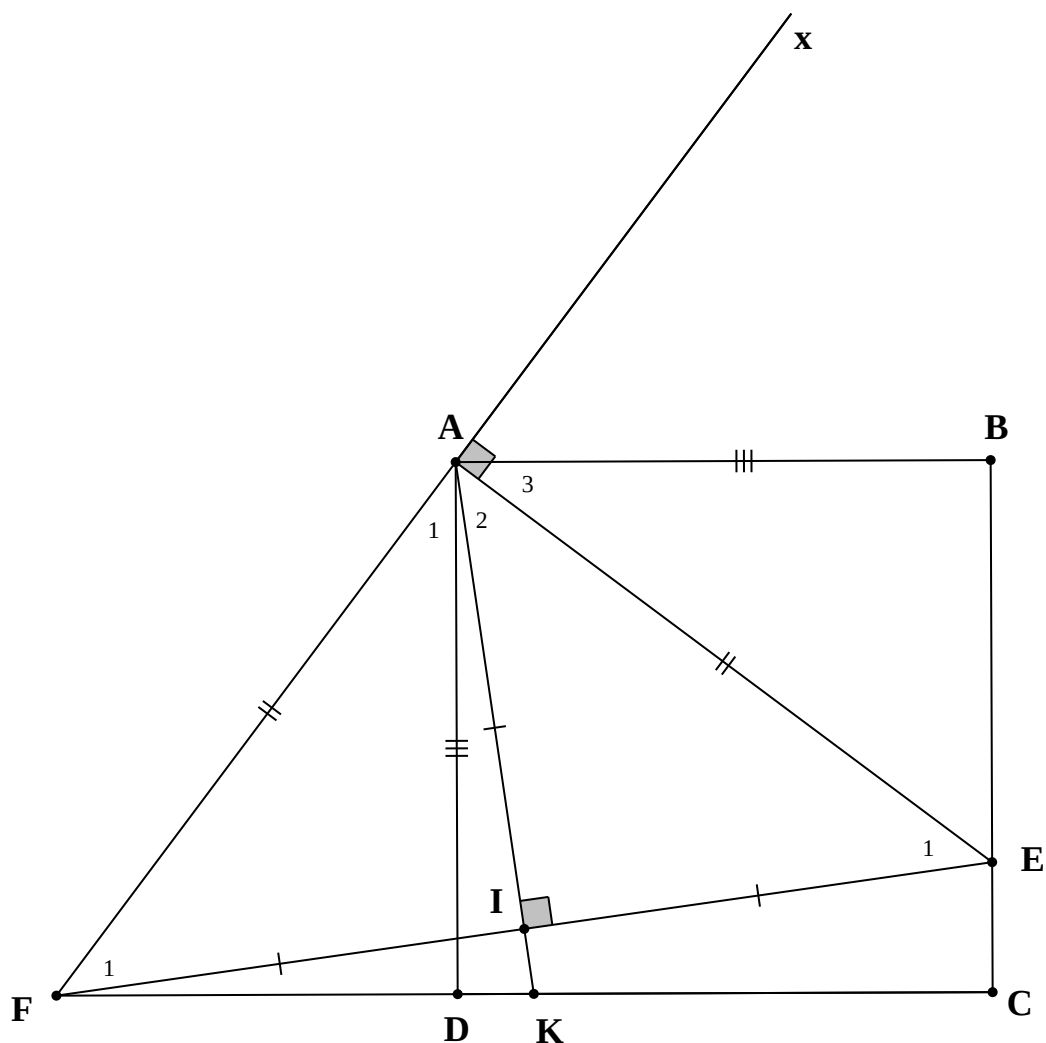
Cho hình vuông ABCD và điểm E trên cạnh BC biết $AB = 4\text{cm}$, $BE = \frac{3}{4}BC$. Tia Ax vuông góc với AE tại A cắt tia CD tại F.

A cắt tia CD tại F.

a) Tính diện tích $\triangle AEF$

b) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng EF, tia AI cắt CD tại K. Chứng minh: $AE^2 = KF \cdot CF$

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$ (cùng phụ với $\widehat{A_2}$)

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADF$ có: $\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_3} & (cmt) \\ \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ & (gt) \end{cases} \Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADF (g.c.g)$

$\Rightarrow AD = AE$ (2 cạnh tương ứng) $\Rightarrow \triangle AEF \perp$ cân tại A.

Mà: $BE = \frac{3}{4}BC$ (gt) $\Rightarrow BE = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3(cm)$

Theo Pi-Ta-Go ta có:

$\Rightarrow AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5(cm) \Rightarrow S_{AEF} = \frac{AE \cdot AF}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = 12,5(cm^2)$

b) Vì: $\triangle AEF \perp$ cân tại A (cmt) $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{F_1} = 45^\circ$

Mà: $FI = EI$ (gt) $\Rightarrow AI$ là trung trực của EF $\Rightarrow AI \perp EF \Rightarrow \triangle IAE$; $\triangle IAF$ cân tại I.

$\Rightarrow FI = EI = AI$

Xét $\triangle IKF$ và $\triangle CEF$ có:

$\begin{cases} \widehat{I} = \widehat{C} = 90^\circ \\ \widehat{F} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle IKF \sim \triangle CEF (g.g) \Rightarrow \frac{IF}{CF} = \frac{KF}{EF} \Rightarrow KF \cdot CF = IF \cdot EF$

$\Rightarrow KF \cdot CF = IF \cdot EF = IF \cdot (2IE) = 2IE^2 = IE^2 + IA^2 = AE^2$ (đpcm)

Câu 6. (2,0 điểm)

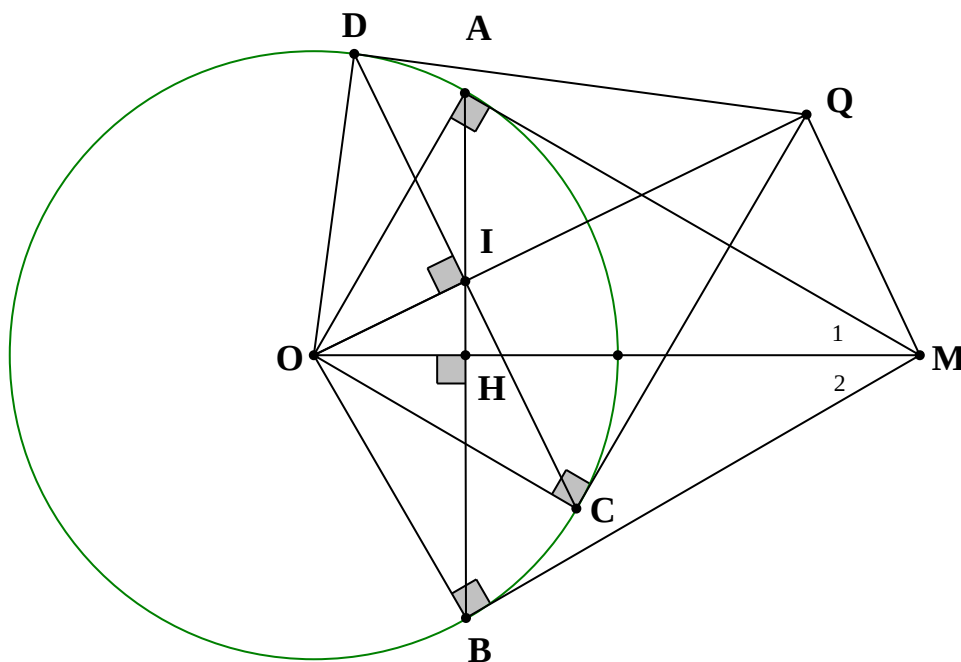
Cho $(O; R)$ và điểm M sao cho $OM = 2R$. Kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Trên đoạn thẳng AB lấy điểm I (Với $AI < BI$ và I khác A). Qua I vẽ dây CD sao cho $IC = ID$ và C thuộc cung nhỏ AB. Tiếp tuyến của (O) tại C cắt OI tại Q. Chứng minh:

a) Tứ giác OCQD nội tiếp được đường tròn.

b) $\triangle AMB$ là tam giác đều.

c) $OQ \perp MQ$

Lời giải



a) Ta có: $IC = ID$ (gt) $\Rightarrow OI \perp CD$ tại I (Đường kính vuông góc với dây cung đi qua trung điểm)

$\Rightarrow OI$ là đường trung trực của CD $\Rightarrow OQ$ là đường trung trực của CD $\Rightarrow QD = QC$

Xét $\triangle DOQ$ và $\triangle COQ$ có: $QD = QC$ (cmt); $OC = OD = R$ (gt); OQ chung

$\Rightarrow \triangle DOQ = \triangle COQ$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{OCQ} = \widehat{ODQ} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OCQ} + \widehat{ODQ} = 180^\circ$

$\Rightarrow \square DOCQ$ nội tiếp.

b) Xét $\triangle AOM \perp$ tại A có: $\sin \widehat{M}_1 = \frac{OA}{OM} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{M}_1 = 30^\circ$

Gọi H là giao điểm của AB và OM ta có: $MA = MB$ (Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Mà: $OA = OB = R \Rightarrow OM$ là đường trung trực của AB $\Rightarrow OM \perp AB$ tại H

$\Rightarrow \widehat{HAM} = 90^\circ - \widehat{M}_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ hay $\widehat{BAM} = 60^\circ$

Mặt khác: $\triangle ABM$ cân tại A (Vì: $MA = MB$) $\Rightarrow \triangle ABM$ đều (đpcm)

c) Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\begin{cases} OI.OQ = OD^2 = R^2 \\ OH.OM = OA^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow OI.OQ = OH.OM \Rightarrow \frac{OI}{OH} = \frac{OM}{OQ}$$

Xét $\triangle OHI$ và $\triangle OQM$ có: $\frac{OI}{OH} = \frac{OM}{OQ}$ (cmt); $\widehat{O}$ chung

$\Rightarrow \triangle OHI \sim \triangle OQM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OQM} = \widehat{OHI} = 90^\circ$

$\Rightarrow OQ \perp MQ$ (đpcm)

Câu 7. (1,0 điểm)

Cho số thực x thỏa mãn $1 \leq x \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{3+x}{x} + \frac{6-x}{3-x}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } T = \frac{3+x}{x} + \frac{6-x}{3-x} = \frac{(3+x)(3-x) + (6-x)x}{x(3-x)} = \frac{9-x^2+6x-x^2}{3x-x^2} = \frac{2x^2-6x-9}{x^2-3x}$$

$$\Rightarrow T(x^2-3x) = 2x^2-6x-9 \Leftrightarrow Tx^2-3Tx-2x^2+6x+9=0 \Leftrightarrow (T-2)x^2+(6-3T)x+9=0 (*)$$

$$\text{Có: } \Delta = (6-3T)^2 - 4(T-2).9 = 36-36T+9T^2-36T+72 = 9(T^2-8T+12)$$

$$\text{Để phương trình (*) có nghiệm thì } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9(T^2-8T+12) \geq 0 \Leftrightarrow T^2-8T+12 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T \leq 2 \\ T \geq 6 \end{cases}$$

$$\text{Với } T=2 \Leftrightarrow \frac{2x^2-6x-9}{x^2-3x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2-6x-9 = 2x^2-6x \Leftrightarrow -9=0 \text{ (vô lý)}$$

$$\text{Với } T=6 \Leftrightarrow \frac{2x^2-6x-9}{x^2-3x} = 6 \Leftrightarrow 2x^2-6x-9 = 6x^2-18x \Leftrightarrow 4x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (TM)}$$

$$\Rightarrow T_{\min} = 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Vì: $1 \leq x \leq 2$. Thay $x=2$ vào T ta được:

$$T = \frac{2x^2-6x-9}{x^2-3x} = \frac{13}{2} = 6,5 \Leftrightarrow 2(2x^2-6x-9) = 13(x^2-3x)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-12x-18 = 13x^2-39x \Leftrightarrow 9x^2-27x+18=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \text{ (TM)}$$

$$\Rightarrow T_{\max} = 6,5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

-----☆☺☆-----