

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KHÁNH HÒA**

Đề thi chính thức

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN
NĂM HỌC: 2023 - 2024**

Môn thi: TOÁN (CHUYÊN)

Ngày thi: 06/06/2023

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (2,00 điểm)

a) Cho biểu thức $M = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - 4 \cdot \frac{x\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}$, với $x > 1$.

Rút gọn M và tìm giá trị nhỏ nhất của M .

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $A = \sqrt{n+3} + \sqrt{n+\sqrt{n+3}}$ là số nguyên.

Câu 2 (2,00 điểm) Cho phương trình $x^2 + bx - 7 + 2b = 0$ (1) (ẩn x), với b là tham số nguyên.

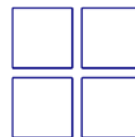
a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm b để $x_2^2 = 9x_1$.

b) Chứng minh rằng nếu b là số nguyên lẻ thì phương trình (1) không có nghiệm hữu tỉ.

Câu 3 (1,50 điểm)

a) Chứng minh $p^4 - 1$ chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p > 5$.

b) Lần cắt thứ nhất, bạn An cắt một mảnh giấy hình vuông thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau (hình vẽ). Lần cắt thứ hai, bạn An lấy một trong các hình vuông đó cắt thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau (như lần thứ nhất), và cứ làm như vậy nhiều lần. Hỏi sau bao nhiêu lần cắt thì bạn An có được 55 hình vuông?



Câu 4 (1,50 điểm)

a) Chứng minh $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq \sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$, với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$k \left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \right] \geq |(x+y-2)(z-1)|$$

Câu 5 (3,00 điểm)

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B ($R > R'$, $\widehat{OAO'} > 90^\circ$). Đường thẳng $O'B$ cắt $(O; R)$ và $(O'; R')$ lần lượt tại E và P (khác B), đường thẳng OB cắt $(O'; R')$ và $(O; R)$ lần lượt tại F và Q (khác B).

a) Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng và $PQ = 2 \cdot OO'$.

b) Qua B dựng đường thẳng song song với EF , cắt $(O; R)$ và $(O'; R')$ lần lượt tại M và N . Chứng minh năm điểm O, A, O', E, F cùng thuộc một đường tròn và $MABE$ là hình thang cân.

c) Tiếp tuyến với $(O'; R')$ tại A cắt $(O; R)$ tại C và tiếp tuyến với $(O; R)$ tại A cắt $(O'; R')$ tại D . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường thẳng AB tại I (khác A). Chứng minh B là trung điểm của AI .

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1 (2,00 điểm)**

a) Cho biểu thức $M = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} - 4 \cdot \frac{x\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}$, với $x > 1$.

Rút gọn M và tìm giá trị nhỏ nhất của M .

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $A = \sqrt{n+3} + \sqrt{n+\sqrt{n+3}}$ là số nguyên.

Lời giải

a) Cho biểu thức $M = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} - 4 \cdot \frac{x\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}$, với $x > 1$.

Rút gọn M và tìm giá trị nhỏ nhất của M .

* Rút gọn M :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} - 4 \cdot \frac{x\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}} \\ &= (\sqrt{x}+\sqrt{x-1}) - (\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) - \frac{4x(\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x-1} + 4x \end{aligned}$$

* Tìm giá trị nhỏ nhất của M :

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{x-1}$ ($t > 0$) $\Rightarrow x = t^2 + 1$

Khi đó $M = 4t^2 + 2t + 4 = \left(2t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 4, \forall t > 0$

$$\Rightarrow M - \frac{15}{4} = \left(2t + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{M - \frac{15}{4}} = 2t + \frac{1}{2}$$

Đặt $y = f(t) = 2t + \frac{1}{2}$: HS bậc nhất, đồng biến (vì $a = 2 > 0$)

Vì $t > 0$ nên $y = f(t) > f(0) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Không tồn tại min $y \Rightarrow$ Không tồn tại min M .

Cách 2:

Do $x > 1$ nên $2\sqrt{x-1} > 0$ và $4x > 4$. Vậy $M > 4, \forall x > 1$

Giả sử m là GTNN của $M \Rightarrow m > 4$

Do $m > 4$ nên tồn tại n sao cho $m > n > 4$

Xét phương trình: $2\sqrt{x-1} + 4x = n \quad (1)$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} + 4(x-1) + 4 - n = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x-1} \quad (t > 0)$. Phương trình trở thành: $4t^2 + 2t + 4 - n = 0 \quad (2)$

Vì $n > 4$ nên $4(4-n) < 0 \Rightarrow$ Phương trình (2) trái dấu

$\Rightarrow$ Phương trình (2) có một nghiệm $t > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có một nghiệm $x > 1$

$\Rightarrow$ Tồn tại $x > 1$ để $M = n$ (Điều này vô lý với giả sử m là GTNN của M)

Vậy không tồn tại GTNN của M .

Cách 3:

Đặt $t = \sqrt{x-1} \quad (t > 0) \Rightarrow x = t^2 + 1$

Khi đó $M = 4t^2 + 2t + 4$

$$\Leftrightarrow \frac{M}{4} = t^2 + \frac{t}{2} + 1 = \left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M}{4} - \frac{15}{16} = \left(t + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow Y = X^2 \quad \text{với} \quad \begin{cases} Y = \frac{M}{4} - \frac{15}{16} \\ X = t + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Giả sử GTNN của $Y = Y_0$ đạt được khi $X = X_0$.

$$\text{Theo định nghĩa ta có: } \begin{cases} \forall X > \frac{1}{4}: Y \geq Y_0 \quad (*) \\ \exists X = X_0 > \frac{1}{4}: Y(X_0) = Y_0 \end{cases}$$

Vì $Y = X^2$ là hàm số đồng biến khi $X > 0$ nên $Y = X^2$ cũng đồng biến khi $X > \frac{1}{4}$

Chọn $X_1 > X_0 > \frac{1}{4} \Rightarrow Y(X_1) > Y(X_0) \Rightarrow Y_1 > Y_0$ (mâu thuẫn với $(*)$)

Vậy không tồn tại GTNN của M .

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $A = \sqrt{n+3} + \sqrt{n+\sqrt{n+3}}$ là số nguyên.

Cách 1:

Đặt $m = \sqrt{n+3} + \sqrt{n+\sqrt{n+3}}, m \in \mathbb{Z}^*$

$$\Rightarrow n + \sqrt{n+3} = (m - \sqrt{n+3})^2 = m^2 + n + 3 - 2m\sqrt{n+3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+3} = \frac{m^2 + 3}{2m+1} \in \mathbb{Q}$$

Do đó $\sqrt{n+3} \in \mathbb{Q}$

$$\text{Mà } n+3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{n+3} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2m+1 \mid m^2+3 \Rightarrow 2m+1 \mid 4m^2+12$$

$$\Rightarrow 2m+1 \mid \left[(2m+1)^2 - 2(2m+1) + 13 \right]$$

$$\Rightarrow 2m+1 \mid 13$$

$$\text{Vì } n \geq 0 \Rightarrow \sqrt{n+3} \geq \sqrt{3} \Rightarrow m \geq \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{3}} > 3$$

$$\text{Vậy } 2m+1=13 \Rightarrow m=6 \Rightarrow \sqrt{n+3} = \frac{6^2+3}{2 \cdot 6+1} = 3 \Rightarrow n=6$$

Vậy $n=6$ là số tự nhiên duy nhất tìm được.

Cách 2:

$$\text{Đặt } a = n+3 \text{ và } b = n + \sqrt{n+3} \ (a, b \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow a-3+\sqrt{a}=b$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{a} + \frac{1}{2} \right)^2 - b = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{a}+1)^2 - (2\sqrt{b})^2 = 13$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{a}+1-2\sqrt{b}) \cdot (2\sqrt{a}+1+2\sqrt{b}) = 13$$

$$\text{Ta có } a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a}+1+2\sqrt{b} > 2\sqrt{a}+1-2\sqrt{b} \\ 2\sqrt{a}+1+2\sqrt{b} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a}+1-2\sqrt{b} = 1 \\ 2\sqrt{a}+1+2\sqrt{b} = 13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=b=9$$

$$\Rightarrow n=6$$

Vậy $n=6$

Câu 2 (2,00 điểm) Cho phương trình $x^2 + bx - 7 + 2b = 0$ (1) (ẩn x), với b là tham số nguyên.

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm b để $x_2^2 = 9x_1$.

b) Chứng minh rằng nếu b là số nguyên lẻ thì phương trình (1) không có nghiệm hữu tỉ.

Lời giải

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm b để $x_2^2 = 9x_1$.

$$+) \text{ Ta có: } \Delta = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7 + 2b) = b^2 - 8b + 28 = (b-4)^2 + 12 \geq 12 > 0 \quad \forall b$$

$$\Rightarrow (1) \text{ luôn có 2 nghiệm phân biệt } x_1, x_2.$$

$$+) \begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = 2b - 7 \end{cases} (*)$$

$$\text{Với } x_2^2 = 9x_1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 + \frac{x_2^2}{9} = -b \\ \frac{x_2^2}{9} \cdot x_2 = 2b - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + \frac{2x_2^2}{9} = -2b \\ \frac{x_2^2}{9} \cdot x_2 = 2b - 7 \end{cases}$$

$$\text{Cộng vế theo vế ta được: } 2x_2 + \frac{2x_2^2}{9} + \frac{x_2^3}{9} = -7$$

$$\Leftrightarrow x_2^3 + 2x_2^2 + 18x_2 + 63 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 + 3) \cdot (x_2^2 - x_2 + 21) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -3$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{x_2^2}{9} = 1$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} -2 = -b \\ -3 = 2b - 7 \end{cases} \Leftrightarrow b = 2 \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa mãn)}$$

b) Chứng minh rằng nếu b là số nguyên lẻ thì phương trình (1) không có nghiệm hữu tỉ.

Cách 1: Nếu b lẻ $\Rightarrow b - 4$ lẻ

Đặt $b - 4 = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Ta cần chứng minh Δ không là số chính phương.

Phản chứng: Δ là số chính phương

$$\Rightarrow \text{Đặt } (2k+1)^2 + 12 = m^2 \Rightarrow m \text{ lẻ}$$

$$\text{Đặt } m = 2l + 1 \Rightarrow \Delta = 4k^2 + 4k + 13 = 4l^2 + 4l + 1$$

$$\Rightarrow k^2 + k + 3 = l^2 + l \text{ (vô lí)} \left(\text{Do } \begin{cases} k^2 + k : \text{chẵn} \\ l^2 + l : \text{chẵn} \\ 3 : \text{lẻ} \end{cases} \right)$$

Vậy Δ không là số chính phương $\Rightarrow$ (1) không có nghiệm hữu tỉ.

Cách 2: Giả sử (1) có nghiệm hữu tỉ, gọi là: $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, (p, q) = 1$).

Theo tính chất về nghiệm hữu tỉ của đa thức nguyên, ta có $q \mid 1$ và $p \mid 2b - 7 \Rightarrow q = 1$ và p lẻ.

Hơn nữa, do $q = 1$ nên p là nghiệm nguyên của (1) $\Rightarrow p^2 + bp - 7 + 2b = 0$.

Mà điều này là vô lí do $p^2 + bp - 7 + 2b$ lẻ $\Rightarrow$ Điều giả sử là sai hay (1) không có nghiệm hữu tỉ.

Cách 3: Đặt $b^2 - 4 \cdot (2b - 7) = a^2, a \in \mathbb{N} (*)$

Nếu b lẻ $\Rightarrow VP$ lẻ $\Rightarrow a$ lẻ

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow b^2 - a^2 = 4 \cdot (2b - 7)$$

Vì a, b đều lẻ nên $a^2, b^2 \equiv 1 \pmod{8}$

$$\Rightarrow 8 \mid a^2 - b^2$$

Mà $4(2b-7)$ không chia hết cho 8 (Do $2b-7$ lẻ).

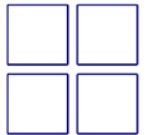
$\Rightarrow$ Mâu thuẫn

Vậy khi b là số nguyên lẻ thì phương trình không thể có nghiệm hữu tỉ.

Câu 3 (1,50 điểm)

a) Chứng minh $p^4 - 1$ chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p > 5$.

b) Lần cắt thứ nhất, bạn An cắt một mảnh giấy hình vuông thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau (hình vẽ). Lần cắt thứ hai, bạn An lấy một trong các hình vuông đó cắt thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau (như lần thứ nhất), và cứ làm như vậy nhiều lần. Hỏi sau bao nhiêu lần cắt thì bạn An có được 55 hình vuông?



Lời giải

a) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p không chia hết cho 2, 3 và 5 (1)

$$\text{Ta có } p^2 \text{ là số chính phương} \Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 0 \pmod{3} \\ p^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ p^2 \equiv 0 \pmod{5} \\ p^2 \equiv 1 \pmod{5} \\ p^2 \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Kết hợp với (1)} &\Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ p^2 \equiv 1 \pmod{5} \\ p^2 \equiv 4 \pmod{5} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} p^4 \equiv 1 \pmod{3} \\ p^4 \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (p^4 - 1) : 3 \\ (p^4 - 1) : 5 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác từ (1)} &\Rightarrow p \text{ lẻ} \\ &\Rightarrow p^4 \equiv 1 \pmod{16} \\ &\Rightarrow (p^4 - 1) : 16 \quad (**) \end{aligned}$$

Từ (*), (**) và 3, 5, 16 nguyên tố cùng nhau suy ra $(p^4 - 1) : (3 \cdot 5 \cdot 16) \Rightarrow (p^4 - 1) : 240$.

Vậy $p^4 - 1$ chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p > 5$.

Cách 2:

Do $p \nmid 3, p \nmid 5$ nên theo định lí Fermat nhỏ ta có

$$p^2 - 1 : 3; p^4 - 1 : 5$$

$$\Rightarrow p^4 - 1 : 15.$$

Ta có $p^4 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2 + 1)$.

Để thấy $p-1 < p+1 < p^2 + 1$ và $p-1; p+1; p^2 + 1$ là ba số chẵn.

Mặt khác $p-1; p+1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1) : 8$

$$\Rightarrow (p-1)(p+1)(p^2 + 1) : 16$$

$$\Rightarrow p^4 - 1 : (16 \cdot 15) = 240.$$

Cách 3:

Ta có $p^5 - p = p(p^4 - 1)$

$$= p(p^2 - 1)(p^2 + 1)$$

$$= p(p-1)(p+1)(p^2 - 4 + 5)$$

$$= (p-2)(p-1)p(p+1)(p+2) + 5p(p-1)(p+1)$$

Vì $p-2, p-1, p, p+1, p+2$ là 5 số tự nhiên liên tiếp nên tồn tại ít nhất một số chia hết cho 3 và 5

$$\text{Mà } (3, 5) = 1$$

$$\Rightarrow (p-2)(p+2)p(p-1)(p+1) : 15 \quad (1)$$

Lại có : p là số nguyên tố > 5 nên $p-1, p+1$ là hai số chẵn liên tiếp và $p^2 + 1 : 2$

$$\Rightarrow (p-1)(p+1)(p^2 + 1) : 16 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow (p-2)(p+2)p(p-1)(p+1) : 240 \quad (\text{vì } (15, 16) = 1)$$

Để thấy với p là số nguyên tố > 5 thì :

$$\begin{cases} p \equiv 1 \pmod{4} \\ p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) : 16 \quad (*)$$

Mặt khác, $p, (p-1), (p+1)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp

$$\Rightarrow p(p-1)(p+1) : 3 \quad (**)$$

Từ (*) và (**)

$$\Rightarrow 5p(p-1)(p+1) : 240$$

$$\text{Suy ra } p^5 - p : 240$$

$$\text{Mà } (p, 240) = 1$$

$$\Rightarrow p^4 - 1 : 240 \quad \forall p \text{ là số nguyên tố } > 5 (\text{đpcm})$$

b) Gọi x là số lần cắt để bạn An có được 55 hình vuông (ĐK: $x \in \mathbb{N}^*, x > 2$).

- Sau lần cắt thứ nhất bạn An có được $4 = 3 \cdot 1 + 1$ (hình vuông).

- Sau lần cắt thứ hai bạn An có được $3 + 4 = 7 = 3 \cdot 2 + 1$ (hình vuông).

- Sau lần cắt thứ ba bạn An có được $3 + 3 + 4 = 10 = 3 \cdot 3 + 1$ (hình vuông).

....

$\Rightarrow$ Sau x lần cắt, bạn An có được $3x + 1$ (hình vuông).

Theo đề bài, ta có phương trình

$$3x + 1 = 55$$

$$\Leftrightarrow 3x = 54$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{54}{3} = 18 (n).$$

Vậy sau 18 lần cắt bạn An có được 55 hình vuông.

Câu 4 (1,50 điểm)

a) Chứng minh $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq \sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$, với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$k[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] \geq |(x+y-2)(z-1)|$$

Lời giải:

a) **Cách 1:**

*) Áp dụng bất đẳng thức B-C-S, ta có:

$$[(x-1)^2 + (y-1)^2][1^2 + 1^2] \geq [(x-1).1 + (y-1).1]^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq \frac{(x+y-2)^2}{2} \quad (1)$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} \Leftrightarrow x = y$

*) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{(x+y-2)^2}{2} + (z-1)^2 \geq 2\sqrt{\frac{[(x+y-2)(z-1)]^2}{2}} = \sqrt{2}|(x+y-2)(z-1)| \quad (2)$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{(x+y-2)^2}{2} = (z-1)^2$

$$*) \text{ Mặt khác: } |(x+y-2)(z-1)| \geq (x+y-2)(z-1) \quad (3)$$

(Dấu “=” xảy ra khi $(x+y-2)(z-1) \geq 0$).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq \sqrt{2}(x+y-2)(z-1) \quad (4)$$

$$*) \text{ Đẳng thức (4) xảy ra khi: } \begin{cases} x = y \\ |x+y-2| = \sqrt{2}|z-1| \\ (x+y-2)(z-1) \geq 0 \end{cases}$$

(Chẳng hạn tại $x = y = z = 1$)

Cách 2:

Đặt $((x-1), (y-1), (z-1)) = (a, b, c)$

$$\text{Ta có: } VT = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + c^2 \geq 2\sqrt{\frac{(a+b)^2 \cdot c^2}{2}} = \sqrt{2}|(a+b)c| \geq \sqrt{2}(a+b)c = VP$$

Vậy $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq \sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$ với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{z-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

(Chẳng hạn tại $x = y = z = 1$)

b)

Giả sử k là số thực nhỏ nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$k[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] \geq |(x+y-2)(z-1)| \quad (*)$$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức $(*)$ cũng đúng khi $x = y, |x+y-2| = |\sqrt{2}(z-1)|$

(Hay $x = y, |z-1| = \sqrt{2}|x-1|$)

$$\text{Do đó: } k[2(x-1)^2 + 2(x-1)^2] \geq |2(x-1) \cdot \sqrt{2}(x-1)|$$

$$\Leftrightarrow 4k(x-1)^2 \geq 2\sqrt{2}(x-1)^2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

Cho $x = 2$, ta được: $4k \geq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

) Ta chứng minh với mọi $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ thì bất đẳng thức $()$ đúng.

Thật vậy:

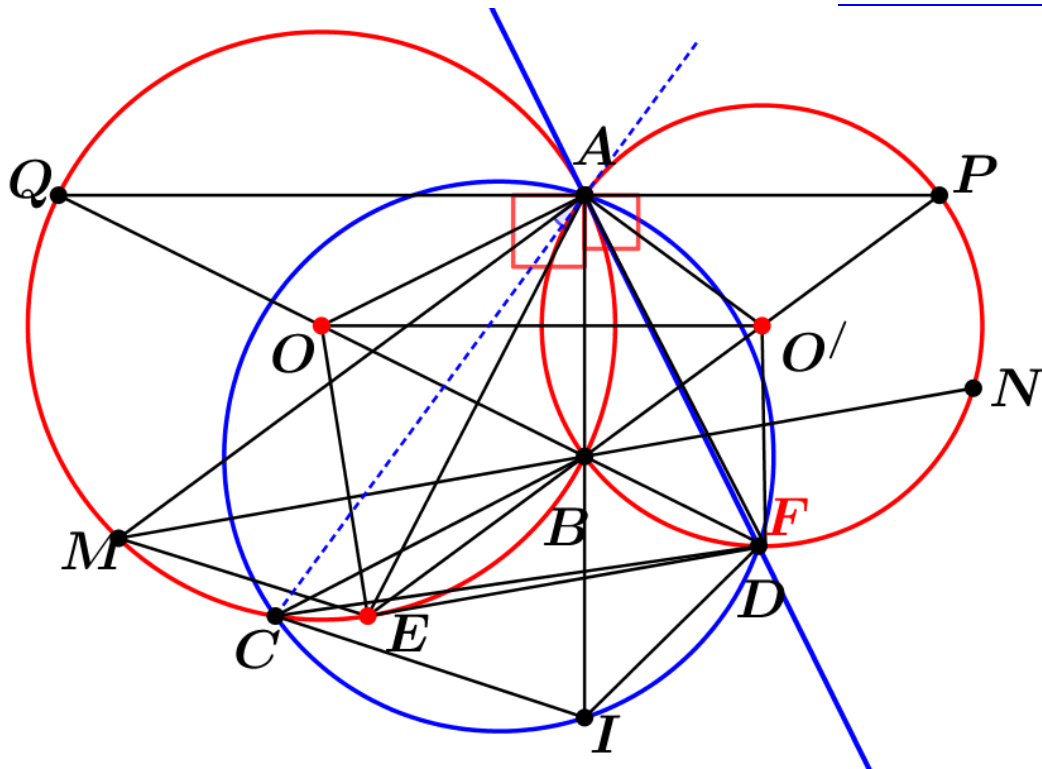
$$\begin{aligned} k[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] &= \left(k - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} |(x+y-2)(z-1)| = |(x+y-2)(z-1)| \text{ (theo chứng minh của câu a).} \end{aligned}$$

Khi $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ thì theo chứng minh câu a ta cũng có bất đẳng thức $(*)$ đúng.

Vậy giá trị k nhỏ nhất cần tìm là $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 5: (3 điểm)

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B ($R > R', \widehat{OAO'} > 90^\circ$). Đường thẳng $O'B$ cắt $(O; R)$ và $(O'; R')$ lần lượt tại E và P (khác B), đường thẳng OB cắt $(O'; R')$ và $(O; R)$ lần lượt tại F và Q (khác B)



a) Chứng minh ba điểm **A, P, Q** thẳng hàng và **PQ = 2OO'**.

Ta có: $\widehat{QAB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O) đường kính BQ).

$\widehat{PAB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O') đường kính BP).

Mặt khác: $\widehat{QAP} = \widehat{QAB} + \widehat{PAB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow A, P, Q$ thẳng hàng

$\triangle BPQ$ có: O là trung điểm QB (QB là đường kính của (O))

O' là trung điểm PB (PB là đường kính của (O'))

Do đó OO' là đường trung bình của $\triangle BPQ$. Suy ra:
$$\begin{cases} OO' \parallel PQ \\ PQ = 2OO' \end{cases}$$

b) Qua **B** dựng đường thẳng song song với **EF**, cắt (O; R) và (O'; R') lần lượt tại **M** và **N**. Chứng minh năm điểm **O, A, O', E, F** cùng thuộc một đường tròn và **MABE** là hình thang cân.

b.1 Chứng minh năm điểm **O, A, O', E, F** cùng thuộc một đường tròn.

b.1.1 Chứng minh bốn điểm O, O', E, F cùng thuộc một đường tròn.

$\triangle OEB$ cân tại O (do $OE = OB = R$) $\Rightarrow \widehat{EOB} = 180^\circ - 2\widehat{OBE}$ hay $\widehat{EOF} = 180^\circ - 2\widehat{OBE} \dots (1)$

$\triangle O'FB$ cân tại O' (do $O'F = O'B = R'$) $\Rightarrow \widehat{BO'F} = 180^\circ - 2\widehat{O'BF}$

hay $\widehat{EO'F} = 180^\circ - 2\widehat{O'BF} \dots (2)$

Mà: $\widehat{OBE} = \widehat{O'BF}$ (đối đỉnh) $\dots (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{EOF} = \widehat{EO'F} \Rightarrow$ Tứ giác $EOO'F$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow O, O', E, F$ cùng thuộc một đường tròn $\dots (4)$.

b.1.2 Chứng minh bốn điểm A, O', E, F cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: $\widehat{AO'B} = 2\widehat{APB}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$ của (O')). Hay $\widehat{AO'E} = 2\widehat{APB}$.

Mặt khác:

$$\widehat{BFE} = \widehat{OFE} \text{ mà } \widehat{OFE} = \widehat{OO'E} \text{ (Tứ giác } EOO'F \text{ nội tiếp)} \Rightarrow \widehat{BFE} = \widehat{OO'E} \dots (5)$$

$$\widehat{AFB} = \widehat{APB} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{AB} \text{ của } (O'))$$

$$OO' \parallel QP \text{ (cmt)} \Rightarrow \widehat{OO'E} = \widehat{APB} \dots (6)$$

Từ (5), (6) suy ra: $\widehat{BFE} = \widehat{APB}$

$$\text{Do đó: } \widehat{AFE} = \widehat{AFB} + \widehat{BFE} = 2\widehat{APB} \text{ mà } \widehat{AO'E} = 2\widehat{APB} \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{AO'E}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AO'FE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow A; O'; E; F$ cùng thuộc một đường tròn ... (7)

Từ (4), (7) suy ra năm điểm $O; A; O'; E; F$ cùng thuộc một đường tròn.

b.2 Chứng minh tứ giác MABE là hình thang cân.**b.2.1 Chứng minh: $MA \parallel EB$.**

Vì (O) và (O') cắt nhau tại A và B nên $OO' \perp AB$ mà $\triangle AOB$ cân tại O (do $OA = OB = R$)

$$\Rightarrow OO' \text{ là phân giác của } \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{BOO'} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}.$$

Mặt khác: $\widehat{MAE} = \widehat{MBE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{ME}$ của (O))

$$\widehat{MBE} = \widehat{O'EF} \text{ (do: } MN \parallel EF)$$

$$\widehat{O'EF} = \widehat{FOO'} = \widehat{BOO'} \text{ (do tứ giác } EOO'F \text{ nội tiếp)}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{MAE} = \widehat{BOO'} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \text{ mà } \widehat{AEB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \text{ (góc nội tiếp chắn } \widehat{AB} \text{ của } (O)).$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{MAE} = \widehat{AEB} \text{ (cặp góc nằm ở vị trí so le trong)} \Rightarrow MA \parallel EB \dots (8)$$

b.2.2 Chứng minh: $\widehat{AME} = \widehat{MAB}$.

$$\widehat{AMB} = \widehat{AEB} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{AB} \text{ của } (O)) \text{ và } \widehat{MAE} = \widehat{AEB} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{BME} = \widehat{BAE} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{BE} \text{ của } (O))$$

$$\text{Ta có: } \widehat{MAB} = \widehat{MAE} + \widehat{BAE} \text{ mà } \widehat{AME} = \widehat{AMB} + \widehat{BME} = \widehat{AEB} + \widehat{BAE} = \widehat{MAE} + \widehat{BAE}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{AME} = \widehat{MAB} \dots (9)$$

Từ (8), (9) suy ra Tứ giác MABE là hình thang cân.

c) Tiếp tuyến với $(O'; R')$ tại A cắt $(O; R)$ tại C và tiếp tuyến với $(O; R)$ tại A cắt $(O'; R')$ tại D.

Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACD$ cắt đường thẳng AB tại I (khác A).

Chứng minh B là trung điểm của AI.

Ta có:

$$\widehat{BAD} = \widehat{ACB} \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung; góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{AB} \text{ của } (O))$$

$$\widehat{CAB} = \widehat{ADB} \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung; góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{AB} \text{ của } (O'))$$

Do đó: $\triangle ABC \# \triangle DBA$ (g - g)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BD \dots (10) \\ \widehat{ABC} = \widehat{ABD} \end{cases}$$

Mặt khác: $\widehat{CBI} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ABD} = \widehat{DBI} \Rightarrow \boxed{\widehat{CBI} = \widehat{DBI}} \dots (i)$

Tứ giác ACID là tứ giác nội tiếp nên ta có: $\widehat{IAD} = \widehat{ICD}$.

Suy ra: $\widehat{BAD} = \widehat{IAD} = \widehat{ICD}$ mà $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ICD}$

Ta lại có: $\widehat{BCI} = \widehat{ICD} + \widehat{BCD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = \widehat{ACD}$

Mà: $\widehat{ACD} = \widehat{AID}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AD}$).

Do đó: $\widehat{BCI} = \widehat{AID} = \widehat{BID} \Rightarrow \boxed{\widehat{BCI} = \widehat{BID}} \dots (ii)$

Từ (i), (ii) suy ra: $\triangle BCI \# \triangle BID$ (g - g) $\Rightarrow \frac{BC}{BI} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow BI^2 = BC \cdot BD \dots (11)$

Từ (10), (11) suy ra $AB = BI \Rightarrow B$ là trung điểm của AI $\square$