

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 30/8/2023

Đề thi gồm 01 trang, 04 bài

Bài 1 (5,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ với $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Tìm: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên k sao cho dãy số (y_n) xác định bởi:

$$y_n = \left(\frac{1}{x_1}\right)^k + \left(\frac{1}{x_2}\right)^k + \dots + \left(\frac{1}{x_n}\right)^k \quad \text{với } n \geq 1, \text{ là dãy bị chặn.}$$

Bài 2 (5,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)f(yf(x)-1) = f(x^2y) - f(x) \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3 (5,0 điểm)

a) Cho p là một số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng

$$(2^{p-2} - 1)^p(2^{p+1} - 2) - 2^{(p-1)^2} + 2 \text{ chia hết cho } p^3.$$

b) Cho n là một số nguyên lớn hơn 7. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương a sao cho $2a \leq n$ và $4a^2 + n$ là một hợp số.

Bài 4 (5,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , có I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC có tâm là J và tiếp xúc với đường thẳng BC tại điểm D . Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của ID, JD . Đường tròn có đường kính là AF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G khác A . Chứng minh rằng: $\widehat{IDB} = \widehat{AGE}$.

-----HẾT-----

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 31/8/2023

Đề thi gồm 01 trang, 03 bài

Bài 5 (7,0 điểm)

Cho 2023 số thực $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2023} = 0.$$

a) Chứng minh rằng, tồn tại các số nguyên dương $i < j \leq 2023$ sao cho

$$a_i a_j \leq -\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2023}^2}{2023}.$$

b) Giả sử rằng $b_1, b_2, \dots, b_{2023}$ là các số thực sao cho bất đẳng thức

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_{2023} - a_{2023})^2 \leq (x_1 - b_1)^2 + \dots + (x_{2023} - b_{2023})^2$$

đúng với mọi bộ 2023 số thực $(x_1, \dots, x_{2023})$ thỏa mãn $x_1 < x_2 < \dots < x_{2023}$. Chứng minh rằng

$$a_1 + \dots + a_k \leq b_1 + \dots + b_k \text{ với mọi } k = 1, 2, \dots, 2023.$$

Bài 6 (6,0 điểm)

Cho số nguyên dương n và một bảng ô vuông $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho: có thể đặt k viên bi vào k ô của bảng đã cho, mỗi ô không quá 1 viên bi và đồng thời trong mỗi bảng con 2×2 của bảng ô vuông đã cho luôn có không quá 2 viên bi.

Bài 7 (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có trục tâm là H . Gọi M là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O) . Đường thẳng qua O song song với AM cắt HM tại K . Gọi E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của K trên AC, AB . Gọi N là trung điểm HM . Chứng minh rằng

a) B, C, O, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) K, E, N, F là các đỉnh của một hình bình hành.

-----HẾT-----

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.