

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH YÊN BÁI

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang, gồm 5 câu)

KỲ THI TUYỂN SINH TRUNG HỌC
NĂM HỌC 2024-2025

Môn thi: Toán Chuyên
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Khoa thi ngày: 02/6/2024.

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm điều kiện của x để $A \geq -1$.

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Cho đường thẳng $(d): y = 3mx - n + 2$ (m, n là các tham số, $m \neq 0$). Tìm m, n biết đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol $(P): y = -x^2$ tại điểm $A(1; -1)$.

2. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4\sqrt{x^2 - 4}} = 2x^2 - 6$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y - xy = -6 \\ x^2 + 4y^2 = 20 \end{cases}$

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và E là một điểm bất kỳ trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác của góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K .

a) Chứng minh $\triangle KAF$ và $\triangle KEA$ là hai tam giác đồng dạng.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng EF cắt OE tại I . Chứng minh rằng đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F .

c) Chứng minh $MN \parallel AB$, trong đó M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I) .

d) Gọi P là giao điểm của NF và AK ; Q là giao điểm của MF và BK . Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi $\triangle KPQ$ theo R khi E di chuyển trên đường tròn (O) .

Câu 4. (1,0 điểm)

1. Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố, ($p > 3$). Chứng minh rằng $2p^2 + 7$ là hợp số.

2. Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^x + 40 = y^2$.

Câu 5. (1,0 điểm)

1. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.

Chứng minh rằng $\frac{a^2}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^2}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^2}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$

2. Một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tham gia một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì của lớp thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm điều kiện của x để $A \geq -1$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{(x-9) - (x-4) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

(do $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$)

b) Ta có:

$$A \geq -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \geq -1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \geq -(\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}, (\text{do } \sqrt{x}+1 > 0)$$

+ Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ ta có: $x \geq \frac{1}{4}; x \neq 4; x \neq 9$

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Cho đường thẳng $(d): y = 3mx - n + 2$ (m, n là các tham số, $m \neq 0$). Tìm m, n biết đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol $(P): y = -x^2$ tại điểm $A(1; -1)$.

2. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4\sqrt{x^2 - 4}} = 2x^2 - 6$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y - xy = -6 \\ x^2 + 4y^2 = 20 \end{cases}$

Lời giải

1.

+ Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (P) là:

$$-x^2 = 3mx - n + 2 \Leftrightarrow x^2 + 3mx - n + 2 = 0$$

+ Để đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P) tại điểm $A(1; -1)$ thì:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \Leftrightarrow (3m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-n + 2) = 0 \Leftrightarrow 9m^2 + 4n - 8 = 0 \\ x_1 = x_2 = \frac{-3m}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

(thử lại thỏa mãn)

$$\text{Vậy: } (m, n) = \left(\frac{-2}{3}; 1\right)$$

2.

Ta có: $\sqrt{x^2 + 4\sqrt{x^2 - 4}} = 2x^2 - 6$, (điều kiện: $x \leq -2; x \geq 2$)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} + 4\sqrt{x^2 - 4} + 4 = 2x^2 - 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x^2 - 4} + 2)^2} = 2x^2 - 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} + 2 = 2x^2 - 6, \left(\text{do } \sqrt{x^2 - 4} + 2 > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} - 2(x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4}(1 - 2\sqrt{x^2 - 4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} = 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, (t/m) \\ x = -2, (t/m) \\ x = \frac{\sqrt{17}}{2}, (t/m) \\ x = -\frac{\sqrt{17}}{2}, (t/m) \end{cases}$$

Vậy: Phương trình đã cho có tập nghiệm là : $S = \left\{ -2; 2; \frac{\sqrt{17}}{2}; -\frac{\sqrt{17}}{2} \right\}$

$$3. \text{ Ta có: } \begin{cases} x - 2y - xy = -6, (1) \\ x^2 + 4y^2 = 20, (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x - 2y) - 4xy = -24 \\ x^2 + 4y^2 = 20 \end{cases}$$

+ Cộng theo về hai phương trình của hệ, ta được:

$$4(x - 2y) - 4xy + x^2 + 4y^2 = (-24) + 20$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4xy + 4y^2) + 4(x - 2y) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + 4(x - 2y) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2y - 2$$

+ Thay $x = 2y - 2$ vào (1) ta được:

$$(2y - 2) - 2y - (2y - 2)y = -6$$

$$\Leftrightarrow -2 - 2y^2 + 2y = -6$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0, (a - b + c = 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -1 \Rightarrow x = -4 \\ y = 2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Vậy: Hệ phương trình đã cho có tập nghiệm là : $S = \{(-4; -1); (2; 2)\}$

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và E là một điểm bất kỳ trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác của góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K .

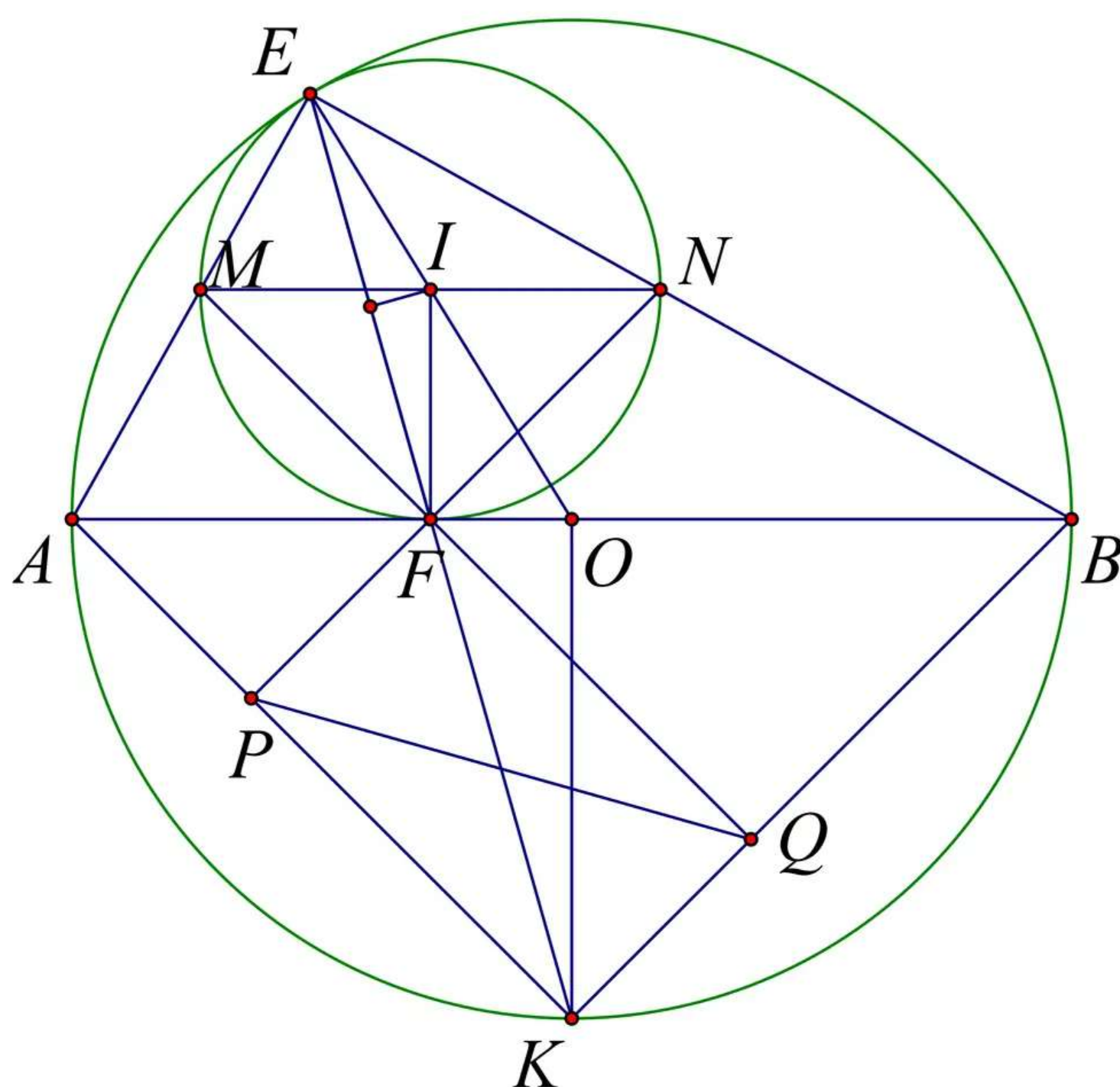
a) Chứng minh ΔKAF và ΔKEA là hai tam giác đồng dạng.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng EF cắt OE tại I . Chứng minh rằng đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F .

c) Chứng minh $MN \parallel AB$, trong đó M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I) .

d) Gọi P là giao điểm của NF và AK ; Q là giao điểm của MF và BK . Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔKPQ theo R khi E di chuyển trên đường tròn (O) .

Lời giải



a) Chứng minh ΔKAF và ΔKEA là hai tam giác đồng dạng.

Ta có: $KAF = KEB = KEA$ và AKE chung
Nên ΔKAF và ΔKEA là hai tam giác đồng dạng.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng EF cắt OE tại I . Chứng minh rằng đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F .

Ta có: $OI = OE - EI = R - r$ nên (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại E

Do $IE = FI$ nên $IEF = IFE$; $OE = OK$ nên $IEF = OKE$

suy ra $IFE = OKE \Rightarrow FI \parallel OK$

mà $AB \perp OK$ ($AK = KB$) nên suy ra $AB \perp FI$

Vậy đường tròn (I) tiếp xúc với đường thẳng AB tại F .

c) Chứng minh $MN \parallel AB$, trong đó M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I) .

Ta có: $MEN = 90^\circ$ nên MN là đường kính của (I) mà EF là đường phân giác của góc

AEB nên $MEF = 45^\circ \Rightarrow MIF = 90^\circ \Rightarrow MI \perp IF$ mà $AB \perp FI$

Nên $MN \parallel AB$

d) Gọi P là giao điểm của NF và AK ; Q là giao điểm của MF và BK . Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔKPQ theo R khi E di chuyển trên đường tròn (O) .

Ta có: $PAF = KEB = 45^\circ$ và $AFP = NFB = BEF = 45^\circ$

nên $\triangle PAF$ vuông cân suy ra $PA = PF$, $APF = 90^\circ \Rightarrow FPK = 90^\circ$
 tương tự $FQK = 90^\circ$ mà $PFQ = MFN = 90^\circ$
 suy ra $FPKQ$ là hình chữ nhật
 suy ra $KQ = PF = AP$; $QP = KF$
 Do đó: $P_{PKQ} = PK + KQ + PQ = PK + PA + KF = AK + KF$
 mà $KF \geq KO = R$ nên $P_{PKQ} \geq AK + R = R\sqrt{2} + R$.
 Dấu “=” xảy ra khi $F \equiv O \Rightarrow E$ là điểm chính giữa cung AB

Câu 4. (1,0 điểm)

- Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố, ($p > 3$). Chứng minh rằng $2p^2 + 7$ là hợp số.
- Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^x + 40 = y^2$.

Lời giải

- Ta có: p là số nguyên tố, $p > 3 \Rightarrow \begin{cases} p \equiv 1 \pmod{3} \\ p \equiv -1 \pmod{3} \end{cases}$

+ Nếu $p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2p+1 \equiv 0 \pmod{3}$, $2p+1 > 3 \Rightarrow 2p+1$ là hợp số, mâu thuẫn với giả thiết $2p+1$ là số nguyên tố, (loại)

+ Do đó, $p \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2p^2 + 7 \equiv 0 \pmod{3}$, $2p^2 + 7 > 3 \Rightarrow 2p^2 + 7$ là hợp số, (Đpcm)

2. * TH1:

+ Nếu x lẻ, $3^x + 1 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 3^x + 40 \equiv 3 \pmod{4}$, mà $y^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$, không thỏa mãn $3^x + 40 = y^2$ (loại)

* TH2:

+ Nếu x chẵn, đặt $x = 2n$, ($n \in \mathbb{N}$), ta có:

$$3^x + 40 = y^2, (1) \Leftrightarrow 3^{2n} + 40 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - (3^n)^2 = 40 \Leftrightarrow (y - 3^n)(y + 3^n) = 40$$

Do $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}^+$ nên $y + 3^n > 3$; $y + 3^n > y - 3^n$ nên ta có bảng giá trị

$y - 3^n$	1	2	4	5
$y + 3^n$	40	20	10	8
3^n	$\frac{39}{2}$	9	3	$\frac{3}{2}$
n	Không thỏa mãn	2	1	Không thỏa mãn
x		4	2	
		thỏa mãn	thỏa mãn	

+ Với $x = 2$, thay vào (1) ta được $y = 7$

+ Với $x = 4$, thay vào (1) ta được $y = 11$

+ Vậy, các cặp số nguyên dương (x, y) cần tìm là $(2; 7)$ và $(4; 11)$

Câu 5. (1,0 điểm)

- Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.

Chứng minh rằng $\frac{a^2}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^2}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^2}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$

2. Một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tham gia một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì của lớp thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh

Lời giải

1. Áp dụng bất đẳng thức Cô -si cho hai số dương, ta có:
Ta có:

$$\frac{a^2}{(1+b)(1+c)} + \frac{(1+b)(1+c)}{16} \geq \frac{1}{2}a \Rightarrow \frac{a^2}{(1+b)(1+c)} + \frac{b+c+bc+1}{16} \geq \frac{1}{2}a$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{(1+b)(1+c)} \geq \frac{1}{2}a - \frac{b+c+bc+1}{16}$$

Chứng minh tương tự: $\frac{b^2}{(1+c)(1+a)} \geq \frac{1}{2}b - \frac{c+a+ca+1}{16}$

$$\frac{c^2}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{1}{2}c - \frac{a+b+ab+1}{16}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a^2}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^2}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^2}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{8}(a+b+c) - \frac{1}{16}(ab+bc+ca) - \frac{3}{16}$$

Áp dụng bất đẳng thức: $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow (a+b+c)^2 \geq 3.3 = 9 \Rightarrow a+b+c \geq 3$

Suy ra: $\frac{a^2}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^2}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^2}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{8}.3 - \frac{1}{16}.3 - \frac{3}{16} = \frac{3}{4}$

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=1$.

2. Nếu số câu lạc bộ môn học nhiều hơn hoặc bằng 5. Ta chọn ở mỗi câu lạc bộ 1 hoặc 2 học sinh để được 10 học sinh, thì 10 học sinh này không thỏa mãn điều kiện luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ.

+ Do đó, số câu lạc bộ môn học sẽ nhỏ hơn 5.

Giả sử tất cả các câu lạc bộ môn học có nhiều nhất 8 học sinh tham gia, lúc đó số học sinh tham gia các câu lạc bộ này không vượt quá $4.8 = 32$ học sinh < 35 học sinh, dẫn đến giả sử trên là sai.

+ Vậy: có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh (Đpcm)

-----Hết-----