

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - m - 2 = 0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 - 5x_1x_2 = 10m + 15$

Câu 2. (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình : $x^2 + x + 5 = 3\sqrt{x^3 + x^3 - x + 2}$
- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 + 4x - 5y + 3 = 0 \\ x^2 - 10y + 9 + 2\sqrt{x-1} = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

- 1) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài bằng $47cm$, chiều rộng bằng $43m$. Chứng minh rằng trong số 2022 điểm bất kỳ nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{2}cm$
- 2) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $5x^2 + 3y^2 = 20x - 24y + 477$

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 24abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{2b}{a\sqrt{16b^2+1}} + \frac{3c}{2b\sqrt{36c^2+1}} + \frac{a}{3c\sqrt{4a^2+1}} \geq \frac{3}{2}$$

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm P, Q nằm ngoài (O) sao cho $\angle POQ$ vuông, PQ không cắt (O) . Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm; tia PA nằm giữa hai tia PQ và PO). Hai cát tuyến PDC, QEC thay đổi của (O) cùng đi qua C (D nằm giữa P và C ; E nằm giữa Q và C). Tia PE cắt đường tròn tại điểm thứ hai F ($F \neq E$). H là giao điểm của AB và OP . Chứng minh rằng :

- 1) Tích $PE \cdot PF$ không đổi
- 2) $\angle AHE = \angle AHF$
- 3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác PDF luôn đi qua một điểm cố định

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - m - 2 = 0$ **với** m **là tham số. Tìm tất cả các giá trị của** m **để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt** $x_1; x_2$ **thỏa mãn** $x_1^3 + x_2^3 - 5x_1x_2 = 10m + 15$

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4(m^2 - m - 2) = 9 > 0$$

Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m+1; x_2 = m-2$. Có :

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 - 5x_1x_2 = 10m + 15 &\Leftrightarrow (m+1)^3 + (m-2)^3 - 5(m+1)(m-2) - 10m - 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow m^3 - 4m^2 + 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \end{aligned}$$

Vậy $m = 3$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình : $x^2 + x + 5 = 3\sqrt{x^3 + x^3 - x + 2}$

Phương trình đã cho tương đương với :

$$(x^2 - x + 1) + 2(x + 2) = 3\sqrt{(x+2)(x^2 - x + 1)}. \text{ Điều kiện } x \geq -2$$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - x + 1}, v = \sqrt{x+2}, u, v \geq 0$. Phương trình trở thành :

$$\begin{aligned} u^2 + 2v^2 = 3uv &\Leftrightarrow u^2 - 3uv + 2v^2 = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u-2v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \Rightarrow x^2 - x + 1 = x + 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \\ u = 2v \Rightarrow x^2 - x + 1 = 4(x+2) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{53}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 + 4x - 5y + 3 = 0(1) \\ x^2 - 10y + 9 + 2\sqrt{x-1} = 0(2) \end{cases}$$

Điều kiện $x \geq 1$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y+3)(x-2y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-3 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$*) y = -x-3 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 + 10x + 39 + 2\sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2 + 14 + 2\sqrt{x-1} = 0 : \text{Vo nghiem}$$

$$*) y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 + 2\sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x - 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow (x-2)^2 = (\sqrt{x-1} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{x-1} - 1 \\ x-2 = 1 - \sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(tm) \Rightarrow y=1 \\ x=2(tm) \Rightarrow y=\frac{3}{2} \end{cases} \\ \sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow x=2(tm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } (x; y) = \left\{ (1; 1); \left(2; \frac{3}{2}\right) \right\}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài bằng $47cm$, chiều rộng bằng $43m$. Chứng minh rằng trong số 2022 điểm bất kỳ nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{2}cm$

Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành 2021 hình vuông nhỏ có cạnh bằng $1cm$

Khi lấy 2022 điểm bất kỳ trong hình chữ nhật $ABCD$ thì chúng thuộc 2021 hình vuông nhỏ trên. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 2 điểm cùng thuộc một hình vuông nhỏ.

Khi đó khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn đường chéo hình vuông nhỏ là $\sqrt{2}cm$

2) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $5x^2 + 3y^2 = 20x - 24y + 477$

$$5x^2 + 3y^2 = 20x - 24y + 477 \Leftrightarrow 5x^2 - 20x + 20 + 3y^2 + 24y + 48 = 545$$

$$\Leftrightarrow 5(x-2)^2 + 3(y+4)^2 = 545$$

Do $5(x-2)^2$ và 545 cùng chia hết cho 5 nên $3(y+4)^2 : 5$

$$\text{Mà } (3, 5) = 1 \text{ nên } 3(y+4)^2 \leq 545 \Leftrightarrow (y+4)^2 \leq \frac{545}{3} \Rightarrow y+4 \leq 13 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \Rightarrow (x-2)^2 = 94(ktm) \\ y=6 \Rightarrow (x-2)^2 = 49 \Rightarrow x=9 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = (9; 6)$$

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 24abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{2b}{a\sqrt{16b^2+1}} + \frac{3c}{2b\sqrt{36c^2+1}} + \frac{a}{3c\sqrt{4a^2+1}} \geq \frac{3}{2}$$

Có $a + 2b + 3c = 24abc \Leftrightarrow \frac{1}{2ab} + \frac{1}{6bc} + \frac{1}{3ca} = 4$

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{2b}; z = \frac{1}{3c}$. Khi đó $xy + yz + zx = 4$. Bất đẳng thức trở thành :

$$P = \frac{x}{\sqrt{y^2+4}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+4}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+4}} \geq \frac{3}{2}. \text{ Có :}$$

$$y^2 + 4 = y^2 + xy + yz + zx = (x+y)(y+z)$$

$$z^2 + 4 = z^2 + xy + yz + zx = (y+z)(z+x)$$

$$x^2 + 4 = x^2 + xy + yz + zx = (z+x)(x+y)$$

$$\Rightarrow P = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(y+z)(z+x)}} + \frac{z}{\sqrt{(z+x)(x+y)}}$$

Áp dụng BĐT Cô si ta được :

$$P \geq \frac{2x}{x+2y+z} + \frac{2y}{x+y+2z} + \frac{2z}{2x+y+z} \Rightarrow P \geq \frac{2x^2}{x^2+2yz+zx} + \frac{2y^2}{xy+y^2+2zy} + \frac{2z^2}{2xz+yz+z^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức :

$$P \geq \frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}. \text{ Lại có :}$$

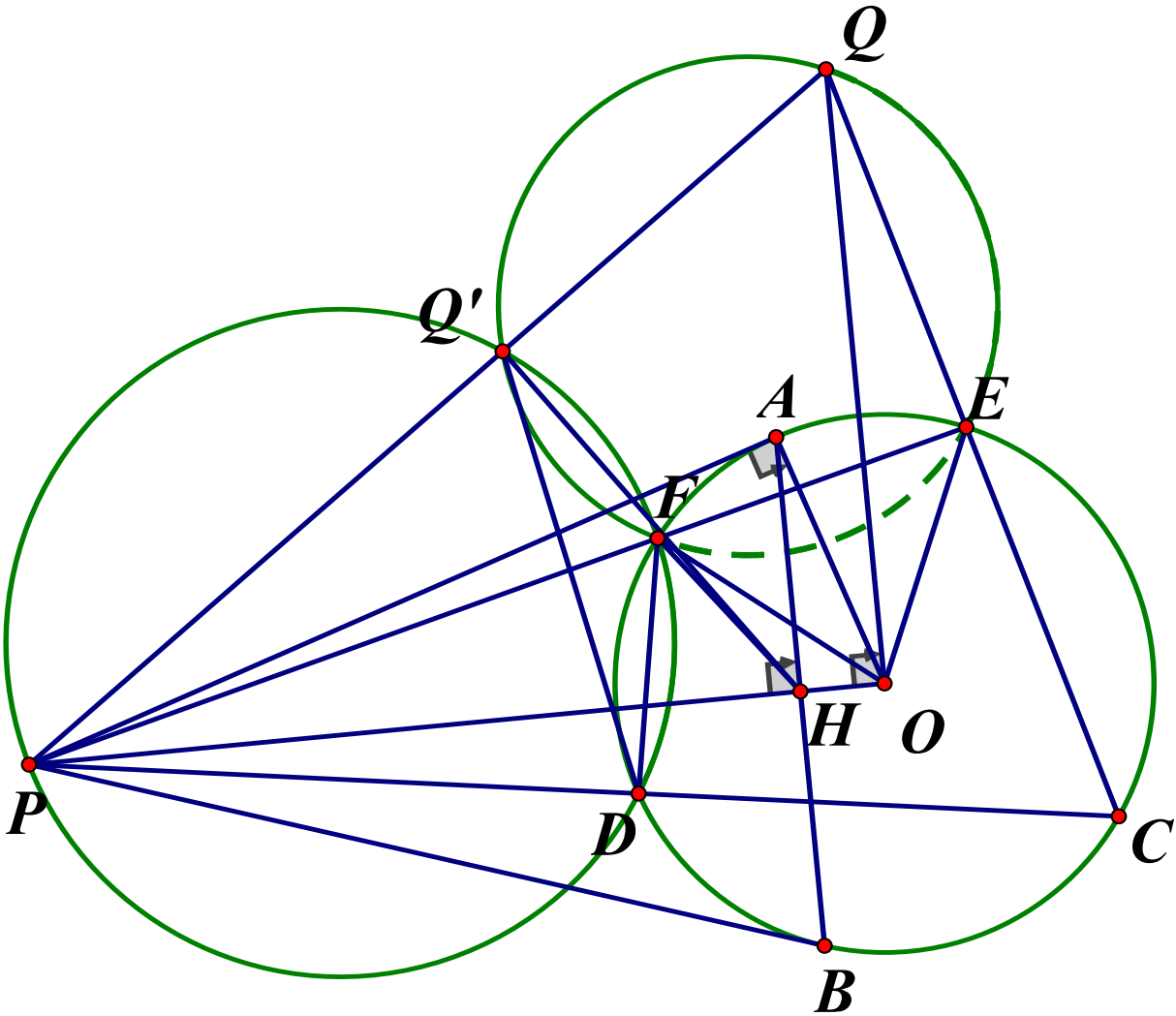
$$xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} \Rightarrow P \geq \frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 + \frac{(x+y+z)^2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Vậy $\text{Min}P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{4}{9}$

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm P, Q nằm ngoài (O) sao cho $\angle POQ$ vuông, PQ không cắt (O) . Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm; tia PA nằm giữa hai tia PQ và PO). Hai cát tuyến PDC, QEC thay

đôi của (O) cùng đi qua C (D nằm giữa P và C ; E nằm giữa Q và C). Tia PE cắt đường tròn tại điểm thứ hai F ($F \neq E$). H là giao điểm của AB và OP . Chứng minh rằng :



1) Tích $PE.PF$ không đổi

Có $\angle PAF = \angle PEA$

$$\Delta PAF \sim \Delta PEA(g.g) \Rightarrow \frac{PA}{PE} = \frac{PF}{PA} \Rightarrow PE.PF = PA^2$$

$$\Delta OAP \text{ vuông tại } A \Rightarrow PA^2 = OP^2 - OA^2 = OP^2 - R^2$$

$$\Rightarrow PE.PF = OP^2 - R^2 : \text{ không đổi}$$

2) $\angle AHE = \angle AHF$

$\triangle OAP$ vuông tại A, AH là đường cao nên $PA^2 = PH.PO$

Do đó $PE.PF = PH.PO \Rightarrow \triangle PHF \sim \triangle PEO(c.g.c)$

$\Rightarrow \angle PHF = \angle PEO \Rightarrow OHEF$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle PHF = \angle OEF = \angle OFE = \angle OHE$, Mà $AH \perp OP$ nên $\angle AHE = \angle AHF$

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác PDF luôn đi qua một điểm cố định

Goi Q' là giao điểm của PQ và đường tròn ngoại tiếp $\triangle QEF$

$\triangle PEQ' \sim \triangle PQE(g.g) \Rightarrow PC.PD = PE.PF$

$\Rightarrow PC.PD = PQ.PQ' \Rightarrow \triangle PQ'D \sim \triangle PCQ(c.g.c) \Rightarrow \angle PQ'D = \angle C$

Mà $\angle PFD = \angle C$ nên $\angle PFD = \angle PQ'D \Rightarrow PDFQ'$ là tứ giác nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp $\triangle PDF$ luôn đi qua điểm Q' cố định.