

Đáp án đề thi Tuyển sinh môn Toán chuyên tỉnh Lâm Đồng năm học 2024-2025

CLB TOÁN HỌC CHUYÊN BẢO LỘC

Cao Quốc Hưng (TK10) Trần Xuân Nam (TK11)

Nguyễn Bảo Quỳnh Như (TK11) Tô Nguyễn Bảo Ngọc(TK11)

Ngày 5 tháng 6 năm 2024

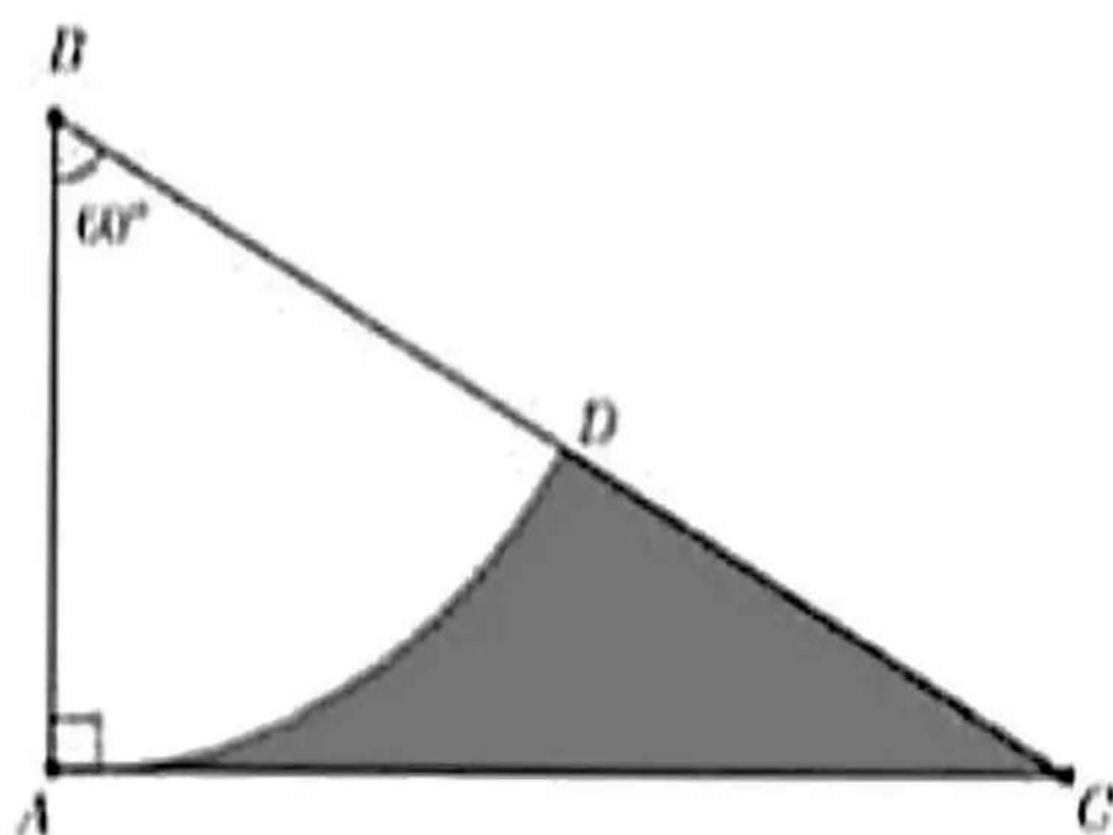
§1 Đề bài

Bài 1. (5,0 điểm)

1.1 Cho biểu thức:
$$\begin{cases} A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{21+8\sqrt{5}} \\ B = \left(1 + \frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \end{cases} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1.$$

Tìm tất cả các số tự nhiên x để $B \geq A$.

1.2 Một khu đất hình tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ và cạnh $AB = 20$ m. Người ta trồng hoa trên phần đất hình quạt tròn $(B; BA)$, phần còn lại của khu đất để trồng cỏ (phần tô đậm hóa bởi hình bên). Tính diện tích phần đất trồng cỏ.



Bài 2. (4,5 điểm)

2.1 Cho nửa hình tròn tâm O đường kính BC . Gọi A là điểm chính giữa cung BC , D là điểm thuộc cung AC (điểm D không trùng điểm A và C). Trên dây BD lấy điểm E sao cho $BE = CD$. Chứng minh rằng tam giác ADE vuông cân.

2.2 Hồ Xuân Hương là một hồ nước nhân tạo hình dạng trăng lưỡi liềm nằm ở trung tâm thành phố Đà Lạt với diện tích khoảng 25ha, mỗi vòng bờ hồ có chiều dài khoảng 5 km và xung quanh là các địa danh du lịch của thành phố như: Vườn hoa thành phố, Công viên Yersin, Đồi Cù, Quảng trường Lâm Viên.

Để rèn luyện sức khỏe, mỗi ngày anh Thanh dành một khoảng thời gian đi bộ và chạy bộ quanh bờ Hồ Xuân Hương với quãng đường 10 km. Biết rằng anh Thanh đi bộ với vận tốc 5 km/h, chạy bộ 10 km/h và thời gian chạy bộ nhiều hơn thời gian đi bộ là 6 phút. Hỏi mỗi ngày anh Thanh đã dành bao nhiêu phút để đi bộ và chạy bộ.

Bài 3. (4,0 điểm)

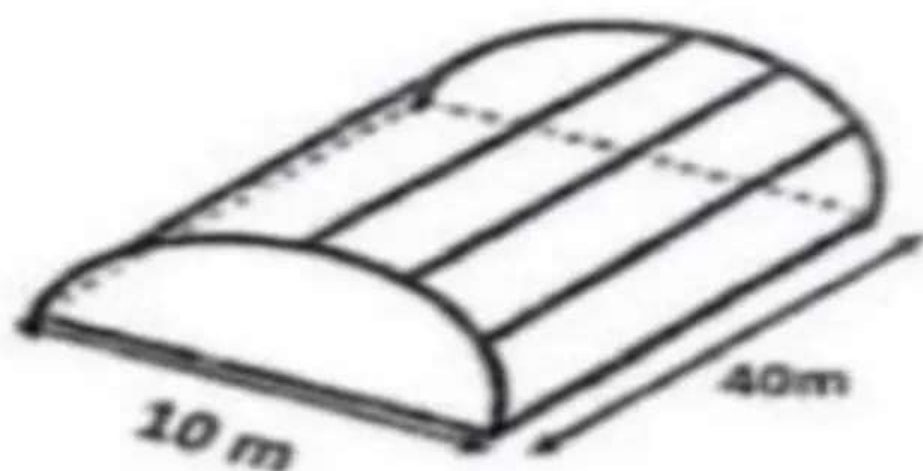
3.1 Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2x + m - 1$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ và thỏa mãn điều kiện $y_1 - 2x_2 = 2027$

3.2 Khi bạn Hòa hỏi số căn cước công dân của bạn Bình, bạn Bình cho biết: "Số đó dạng $\overline{06820900abcd}$ với $\overline{abcd}$ là số chính phương và $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ ". Em hãy giúp bạn Hoà xác định số căn cước công dân của bạn Bình.

Bài 4. (3,5 điểm)

4.1 Bác An dự định làm một nhà kính trồng rau sạch, phần mái vòm có dạng nửa hình trụ đường kính đáy là 10 m, chiều dài là 40 m (minh họa bởi hình bên). Để phủ kín mái vòm (gồm diện tích xung quanh nửa hình trụ và kể cả hai nửa đáy) bác An ra cửa hàng mua một tấm nhựa Politiv, mỗi tấm có chiều rộng 2,2m và chiều dài 50 m với giá 15000 đồng /m².

Tính số tiền bác An mua các tấm nhựa Politiv để phủ kín mái vòm ở trên, biết rằng cửa hàng chỉ bán nguyên tấm (lấy $\pi \approx 3,14$)



4.2 Giải phương trình: $2024\sqrt{2024x - 2023} + \sqrt{2025x - 2024} = 2025$

Bài 5. (3,0 điểm)

5.1 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O) . Tia phân giác của các góc BAC, ABC, ACB cắt đường tròn (O) lần lượt tại D, E, F . Chứng minh:

a) $AD \cdot BC = AC \cdot BD + AB \cdot CD$

b) $AD + BE + CF > AB + AC + BC$

5.2 Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh lần lượt là a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$ và

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \frac{3}{2}. \text{ Chứng minh rằng tam giác } ABC \text{ đều.}$$

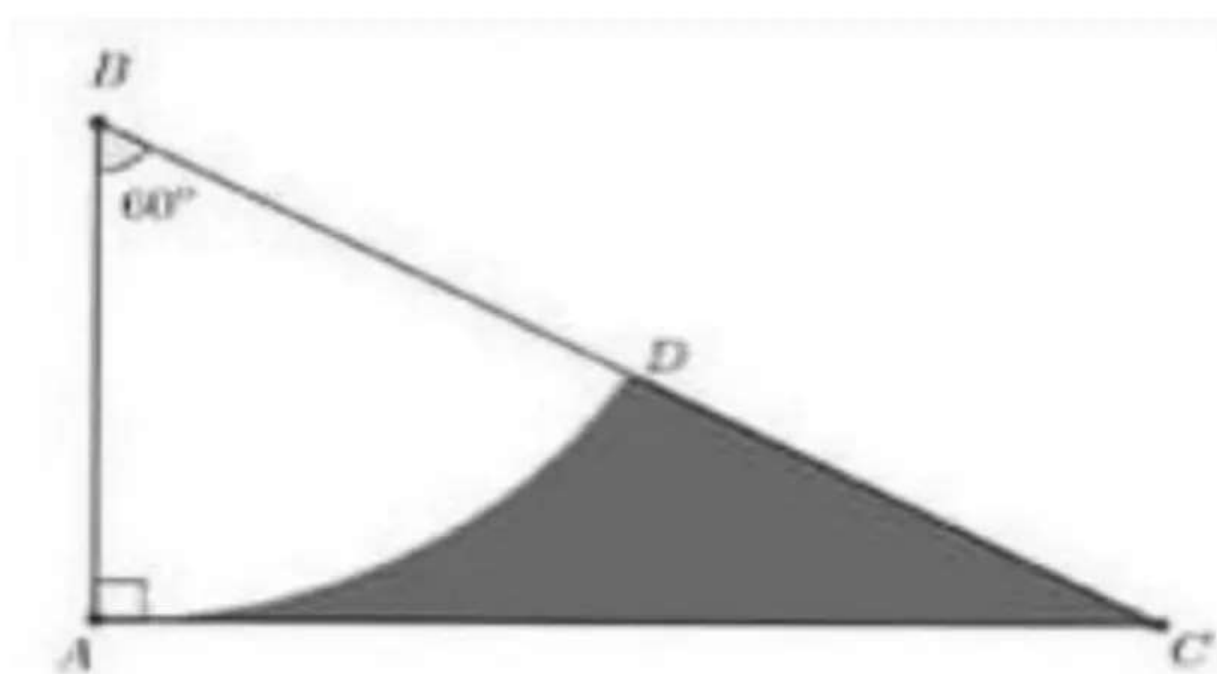
§2 Đáp án

Bài 1:(5,00 điểm)

1.1 Cho biểu thức:
$$\begin{cases} A = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{21 + 8\sqrt{5}} \\ B = \left(1 + \frac{x + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}\right) \end{cases}$$
 với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Tìm tất cả các số tự nhiên x để $B \geq A$.

1.2 Một khu đất hình tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ và cạnh $AB = 20$ m. Người ta trồng hoa trên phần đất hình quạt tròn $(B; BA)$, phần còn lại của khu đất để trồng cỏ (phần tô đậm hóa bởi hình bên). Tính diện tích phần đất trồng cỏ.

**Lời giải.**

1.1 Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} - \sqrt{(4 + \sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{5} - 2 - 4 - \sqrt{5} = -6 \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left[1 + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{1 + \sqrt{x}}\right] \cdot \left[1 + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x}}\right] \\ &= (1 + \sqrt{x}) \cdot (1 - \sqrt{x}) = 1 - x \end{aligned}$$

$$B \geq A \Leftrightarrow 1 - x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 7$$

Mà $x \neq 1$

Vậy $x \in \{0; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

1.2 Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích tam giác ABC và phần đất hình quạt

Do $\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow AC = AB \cdot \tan \angle ABC = 20 \cdot \tan 60^\circ = 20\sqrt{3} \approx 34,6$ (m)

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AC \approx \frac{1}{2} 20 \cdot 34,6 \approx 346 (m^2) \quad S_2 = \frac{\pi AB^2 \cdot 60}{360} \approx \frac{3,14 \cdot 20^2 \cdot 60}{360} \approx 209,33$$

Vậy diện tích phần đất trồng cỏ khoảng $346 - 209,33 = 136,67 \text{ m}^2$.
(nhận)

Vậy anh Thanh dành $\frac{3}{5}$ (giờ) = 36 (phút) để đi bộ, $\frac{7}{10}$ (giờ) = 42 (phút) để chạy bộ.

Bài 3(3,5 điểm)

3.1 Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2x + m - 1$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ và thỏa mãn điều kiện $y_1 - 2x_2 = 2027$

3.2 Khi bạn Hòa hỏi số căn cước công dân của bạn Bình, bạn Bình cho biết: "Số đó dạng $\overline{06820900abcd}$ với $\overline{abcd}$ là số chính phương và $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ ". Em hãy giúp bạn Hoà xác định số căn cước công dân của bạn Bình.

Lời giải:

3.1 Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2 = -2x + m - 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = m$$

Do (d) và (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt nên $m > 0$

Đồng thời (d) và (P) cắt nhau tại $x = \sqrt{m} - 1 \vee x = -\sqrt{m} - 1$

Ta có: A nằm trên (d) nên $y_1 = m - 2x_1 - 1$.

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = -2$

Do vậy

$$2027 = y_1 - 2x_2 = m - 2x_1 - 2x_2 - 1 = m + 3 \Rightarrow m = 2024$$

Thử lại: $m = 2024$ thỏa mãn.

3.2 Đặt $x = \overline{cd}$

Ta có: $\overline{ab} = x + 1$

Do $ab\overline{cd}$ là số chính phương nên tồn tại t sao cho $t^2 = \overline{abcd}$

Do $1000 \leq \overline{abcd} < 10000$ nên $31 < t < 100$

Khi đó:

$$t^2 = \overline{abcd} = 100 \cdot (x + 1) + x = 101x + 100 \Leftrightarrow 101x = t^2 - 100 = (t - 10)(t + 10)$$

Ta thấy $t - 10 < 100 \Rightarrow 101t \nmid t - 10$

Do vậy $t+10:101$ mà $31 < t < 100$ nên $t+10=101 \Rightarrow t=91 \Rightarrow x=t-10=81$

Vậy $\overline{abcd}$

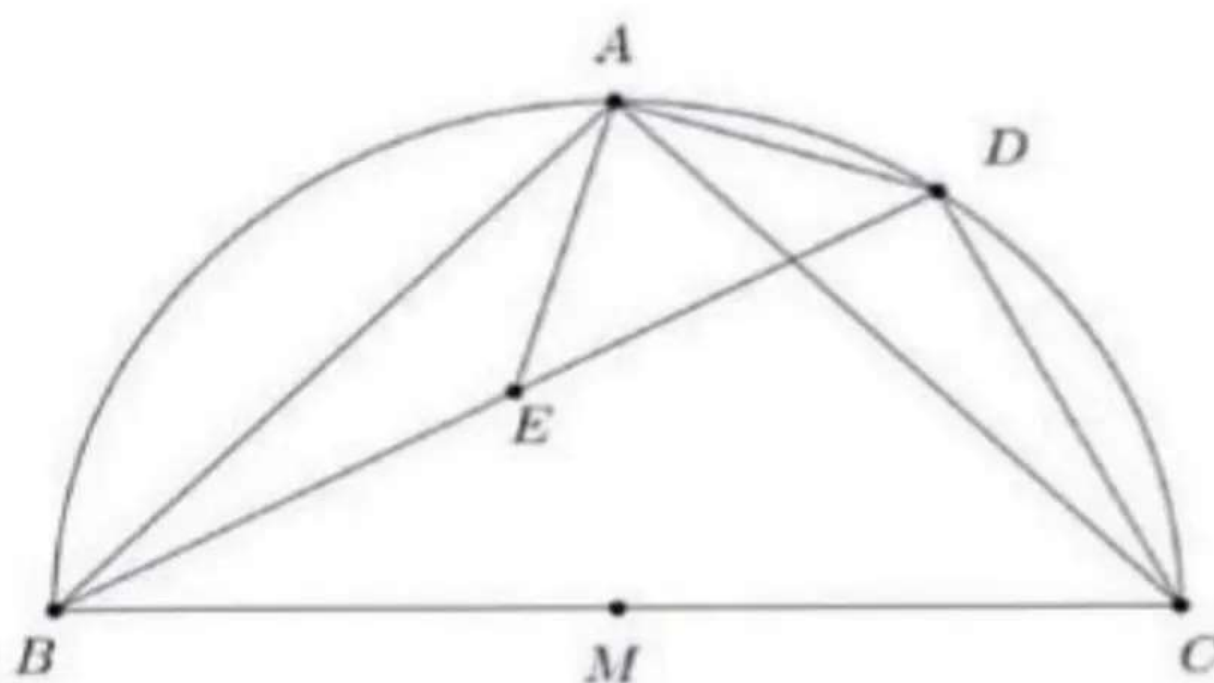
Bài 2(4,5 điểm)

2.1 Cho nửa hình tròn tâm O đường kính BC . Gọi A là điểm chính giữa cung BC , D là điểm thuộc cung AC (điểm D không trùng điểm A và C). Trên đáy BD lấy điểm E sao cho $BE=CD$. Chứng minh rằng tam giác ADE vuông cân.

2.2 Hồ Xuân Hương là một hồ nước nhân tạo hình dạng trăng lưỡi liềm nằm ở trung tâm thành phố Đà Lạt với diện tích khoảng 25ha, mỗi vòng bờ hồ có chiều dài khoảng 5 km và xung quanh là các địa danh du lịch của thành phố như: Vườn hoa thành phố, Công viên Yersin, Đồi Cù, Quảng trường Lâm Viên. Để rèn luyện sức khỏe, mỗi ngày anh Thanh dành một khoảng thời gian đi bộ và chạy bộ quanh bờ Hồ Xuân Hương với quãng đường 10 km. Biết rằng anh Thanh đi bộ với vận tốc 5 km/h, chạy bộ 10 km/h và thời gian chạy bộ nhiều hơn thời gian đi bộ là 6 phút. Hỏi mỗi ngày anh Thanh đã dành bao nhiêu phút để đi bộ và chạy bộ.

Lời giải.

2.1 .



Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ có:

$$AB = AC$$

$$BE = CD \Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACD$$

$$\angle ABE = \angle ACD$$

Suy ra $AE = AD$ và $\angle BAE = \angle CAD$

$$\Rightarrow \angle EAD = \angle BAC = 90^\circ$$

Do đó, ta thu được $\triangle EAD$ vuông cân tại A .

2.2 Đổi 6 phút $= \frac{1}{10}$ giờ.

Gọi thời gian anh Thanh đi bộ là x (giờ) ($x > 0$).

Thời gian anh Thanh chạy bộ là $x + \frac{1}{10}$ (giờ).

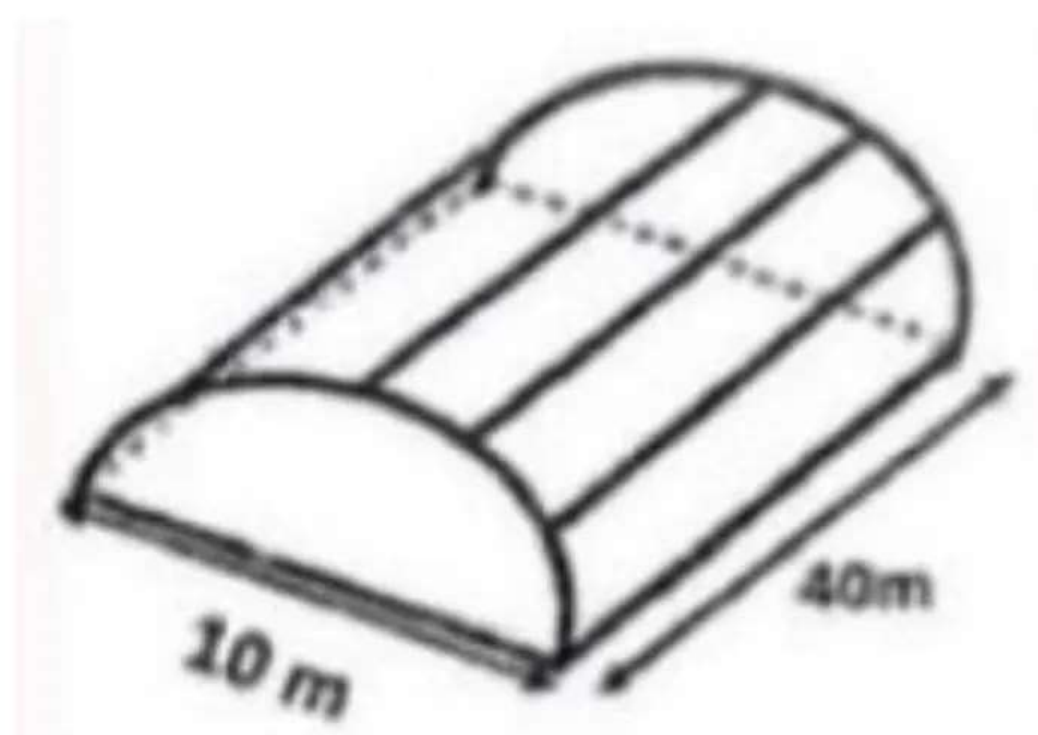
Vì anh Thanh đi bộ và chạy bộ hết quãng đường 10 km nên ta có phương trình

$$5x + 10\left(x + \frac{1}{10}\right) = 10 \Leftrightarrow 15x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$$

Bài 4(4,0 điểm)

4.1 Bác An dự định làm một nhà kính trồng rau sạch, phần mái vòm có dạng nửa hình trụ đường kính đáy là 10 m, chiều dài là 40 m (minh hoạ bởi hình bên). Để phủ kín mái vòm (gồm diện tích xung quanh nửa hình trụ và kể cả hai nửa đáy) bác An ra cửa hàng mua một tấm nhựa Politiv, mỗi tấm có chiều rộng 2,2 m và chiều dài 50 m với giá 15000 đồng /m².

Tính số tiền bác An mua các tấm nhựa Politiv để phủ kín mái vòm ở trên, biết rằng cửa hàng chỉ bán nguyên tấm (lấy $\pi \approx 3,14$).



4.2 Giải phương trình: $2024\sqrt{2024x - 2023} + \sqrt{2025x - 2024} = 2025$

Lời giải.

4.1 Diện tích xung quanh nửa hình trụ là $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 10 \cdot 40 \approx 628$ (m²)

Diện tích hai nửa đáy là $\pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2 \approx 78,5$ (m²)

Diện tích của mỗi tấm Politiv là $2,2 \cdot 50 = 110$ (m²)

Ta có $(628 + 78,5) : 110 \approx 6,42$

Suy ra Bác An cần mua 7 tấm nhựa Politiv.

Số tiền bác An mua các tấm nhựa là $7 \cdot 110 \cdot 15000 = 11550000$ đồng.

4.2 DKXD: $x \geq \frac{2024}{2025}$

Ta có : $2024\sqrt{2024x - 2023} + \sqrt{2025x - 2024} = 2025$ (1)

Nếu $x < 1$ từ (1) $\Rightarrow 2025 < 2024 \cdot \sqrt{2024 - 2023} + \sqrt{2025 - 2024} = 2025$ (vô lí)

Nếu $x > 1$ từ (1) $\Rightarrow 2025 > 2024 \cdot \sqrt{2024 - 2023} + \sqrt{2025 - 2024} = 2025$ (vô lí)

Với $x = 1$ thì ta thấy $VT = VP$

Vậy $x = 1$ là nghiệm phương trình.

Bài 5(3,0 điểm)

5.1 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O) . Tia phân giác của các góc BAC, ABC, ACB cắt đường tròn (O) lần lượt tại D, E, F . Chứng minh:

a) $AD \cdot BC = AC \cdot BD + AB \cdot CD$

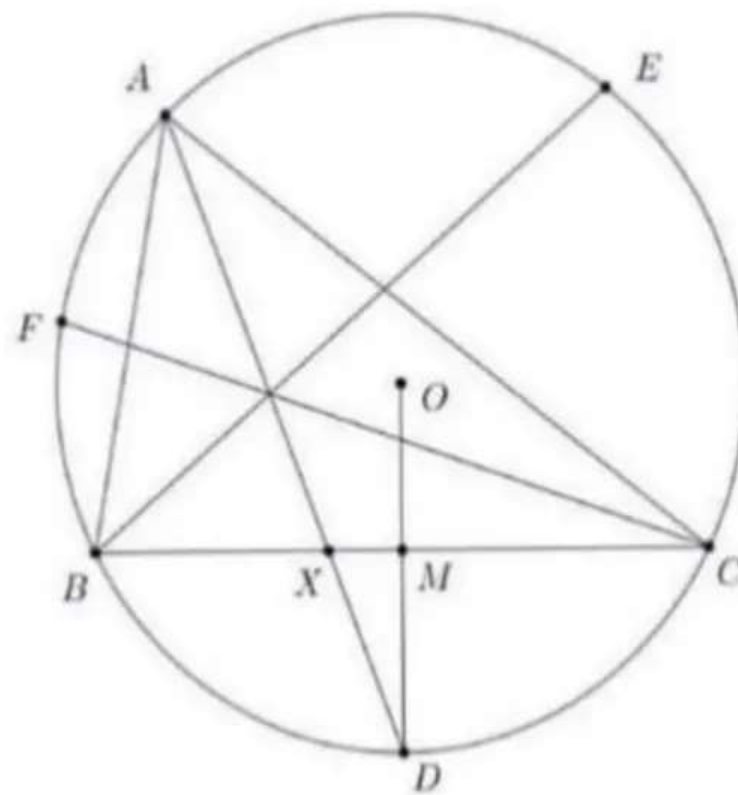
b) $AD + BE + CF > AB + AC + BC$.

5.2 Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh lần lượt là a, b, c thoả mãn $a + b + c + 1$ và

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \frac{3}{2}. \text{ Chứng minh rằng tam giác } ABC \text{ đều.}$$

Lời giải.

5.1



a) Gọi X là giao điểm của AD và BC .

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AXC$ có:

$$\angle BAD = \angle XAC$$

$$\angle ADB = \angle ACX$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AXC$$

Suy ra $\frac{DB}{AD} = \frac{CX}{AC} \Rightarrow DB \cdot AC = CX \cdot AD$. (1)

Tương tự, ta thu được $DC \cdot AB = BX \cdot AD$ (2)

Công (1) và (2) vế theo vế, ta thu được:

$$DB \cdot AC + DC \cdot AB = AD(CX + BX) = AD \cdot BC.$$

b) Gọi M là trung điểm BC , do đó O, M, C thẳng hàng

$$\text{Từ kết quả ý a), ta có } AD = \frac{AC \cdot BD + AB \cdot CD}{BC} = (AB + AC) \frac{BD}{2BM}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB + AC}{2} \frac{1}{\sin \angle DBM} > \frac{AB + AC}{2}$$

$$\text{Tương tự, ta thu được } BE > \frac{BC + BA}{2} \text{ và } CF > \frac{CA + CB}{2}$$

Cộng vế theo vế 3 đẳng thức trên, ta suy ra $AD + BE + CF > AB + BC + AC$. Ta thu được điều phải chứng minh.

$$5.2 \text{ Đặt } T = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\ &= (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 \\ &\geq (a+b+c) \cdot \frac{9}{2(a+b+c)} - 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $a = b = c$

Mà $T = \frac{3}{2}$ nên dấu " $=$ " xảy ra do vậy $a = b = c$ hay $\triangle ABC$ đều.

=8281