

Câu I (3,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

2. Tính giá trị biểu thức: $B = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a và b để đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A(1;3)$ và $B(2;5)$.

Câu II (3,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(y-1) + y(x+1) = 6 \\ (x-1)(y+1) = 2 \end{cases}$$

2. Cho phương trình: $x^2 - 3mx + m^2 - 5 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1^2 + 3mx_2 - 13 \leq 0$.

3. Giải phương trình: $(x^2 - 6x)^2 + (x - 3)^2 = 29$.

Câu III (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính BC , điểm H cố định thuộc tia đối của tia BC . Qua H kẻ đường thẳng d vuông góc với BC . Lấy điểm M bất kì trên đường thẳng d , qua M kẻ các tiếp tuyến MP, MK với đường tròn (O) . Dây PK cắt OM tại N và cắt OH tại Q .

1. Chứng minh năm điểm M, P, O, K, H cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh rằng $OH.OQ = R^2$.

3. Cho $\angle POK = 120^\circ$. Tính diện tích tứ giác $MPOK$ theo R .

4. Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d thì trọng tâm G của tam giác HPC chạy trên một đường tròn cố định.

Câu IV (1,0 điểm)

1. Kết thúc năm học 2022 - 2023, Hòa hỏi Bình: “Bạn có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và điểm 9 vậy?”. Bình trả lời: “Số bài kiểm tra đạt điểm 8, điểm 9 của tớ nhiều hơn 21 và tổng số điểm của các bài kiểm tra đó là 183”. Em hãy tính giúp Hòa xem Bình có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 9 nhé.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2023}{1-x} + \frac{1}{x}$, với $0 < x < 1$.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: Phòng thi:

Giám thị 1: Giám thị 2:

Câu I (3,0 điểm)

Phần, ý	Nội dung	Điểm
1	* ĐKXĐ: $x \neq 2$ $A = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$	1,0
2	$A = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$	0,5
	$= \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{3}.$	0,5
3	(d) đi qua hai điểm $A(1;3)$ và $B(2;5) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$	0,5
	Giải hệ phương trình ta được: $a = 2; b = 1$. KL....	0,5

Câu II (3,0 điểm)

Phần, ý	Nội dung	Điểm
1	$\begin{cases} x(y-1) + y(x+1) = 6 \\ (x-1)(y+1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - (x-y) = 6 \\ xy + (x-y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ x = y \end{cases}.$ Tìm được các nghiệm: $(\sqrt{3}; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$	0,5
2	Ta có $\Delta = 9m^2 - 4(m^2 - 5) = 5m^2 + 20 > 0, \forall m$. Suy ra phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m . Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 5 \end{cases}$	0,5
2	$x_1^2 + 3mx_2 - 13 \leq 0 \Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 - 13 \leq 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 \cdot x_2 - 13 \leq 0$ $\Leftrightarrow (3m)^2 - (m^2 - 5) - 13 \leq 0 \Leftrightarrow 8m^2 \leq 8 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$	0,5
3	$(x^2 - 6x)^2 + (x - 3)^2 = 29 \Leftrightarrow (x^2 - 6x)^2 + (x^2 - 6x) - 20 = 0$ (1)	0,25
	Đặt $t = x^2 - 6x$, phương trình (1) trở thành: $t^2 + t - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -5 \end{cases}$	0,25
	$\oplus t = 4 \Rightarrow x^2 - 6x = 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{13} \\ x = 3 - \sqrt{13} \end{cases}$	0,25
	$\oplus t = -5 \Rightarrow x^2 - 6x = -5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$ Kết luận: ...	0,25

Câu III (3,0 điểm)

Phần, ý	Nội dung	Điểm
---------	----------	------

	* Ghi chú: Nếu HS lấy điểm H thuộc tia BC thì trừ 0,5 điểm toàn bài.	
1	Giải thích được: $MPO = MHO = MKO = 90^\circ$	0,5
	$\Rightarrow P, K, H$ thuộc đường tròn đường kính MO . $\Rightarrow M, P, O, K, H$ cùng thuộc đường tròn đường kính MO .	0,5
2	Xét ΔMPO vuông tại P, có $PN \perp MO$: $\Rightarrow ON \cdot OM = OP^2$ (1) (Hệ thức lượng trong tam giác vuông).	0,5
	$\Delta ONQ \sim \Delta OHM$ (HOM chung; $ONQ = OHM = 90^\circ$). $\Rightarrow \frac{ON}{OH} = \frac{OQ}{OM} \Leftrightarrow OM \cdot ON = OH \cdot OQ$ (2) Từ (1), (2) $\Rightarrow OH \cdot OQ = OM \cdot ON = OP^2 = R^2$.	0,5
3	Vì $POK = 120^\circ$ nên $PMK = 60^\circ$ và MO là phân giác của PMK $\Rightarrow PMO = KMO = 30^\circ$ ΔOPM vuông tại P, có: $OP = OM \cdot \sin PMO$ $\Rightarrow OM = \frac{R}{\sin 30^\circ} = 2R$ (cm).	0,25
	ΔPNO vuông tại N, có: $NP = OP \cdot \sin PON$ mà $PON = 90^\circ - OMP = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (ΔMPO vuông tại P). $\Rightarrow NP = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ (cm) $\Rightarrow KP = R\sqrt{3}$ (cm) Ta có $OM \perp KP \Rightarrow S_{MPOK} = \frac{1}{2} OM \cdot KP = R^2 \sqrt{3}$ (cm ²).	0,25
4	Lấy I là trung điểm của HC , $G \in PI$ sao cho $PG = \frac{2}{3} PI$. Từ G kẻ đường thẳng song song với OP cắt HC tại E. HC cố định $\Rightarrow I$ cố định ΔIPO có $GE \parallel PO \Rightarrow \frac{GE}{PO} = \frac{IE}{IO} = \frac{IG}{IP} = \frac{1}{3}$ (Định lý Talet) (do G là trọng tâm của ΔPHC).	0,25
	$\Rightarrow IE = \frac{IO}{3}$ không đổi. Mà I, O cố định $\Rightarrow E$ cố định. (1)	0,25

	$GE = \frac{PO}{3} = \frac{R}{3}$ không đổi. (2) $(1), (2) \Rightarrow G \in \left(E; \frac{R}{3}\right)$ cố định khi M chuyển động trên d .	
--	---	--

Câu IV (1,0 điểm)

Phần, ý	Nội dung	Điểm
1	Gọi số bài điểm 8 và điểm 9 của Bình đạt được lần lượt là x, y (bài) ($x, y \in \mathbb{N}^*$). Theo giả thiết $x + y > 21$. Tổng số điểm của tất cả các bài kiểm tra đó là 183 nên ta có: $8x + 9y = 183$. Ta có $183 = 8x + 9y \geq 8(x + y) \Rightarrow x + y \leq \frac{183}{8}$. Do $x + y \in \mathbb{N}^*$ và $21 < x + y \leq \frac{183}{8}$ nên $x + y = 22$.	0,25
	Ta có hệ $\begin{cases} x + y = 22 \\ 8x + 9y = 183 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 7 \end{cases}$ (thỏa mãn). Vậy Bình được 15 bài điểm 8 và 7 bài điểm 9.	0,25
2	Ta có $P = \frac{2023}{1-x} + \frac{1}{x} = \frac{(2023-2023x) + 2023x}{1-x} + \frac{(1-x) + x}{x}$ $= 2024 + \frac{2023x}{1-x} + \frac{1-x}{x} \geq 2024 + 2\sqrt{\frac{2023x}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x}} = 2024 + 2\sqrt{2023}$ (áp dụng BĐT Côsi với 2 số dương)	0,25
	Đẳng thức xảy ra $\frac{2023x}{1-x} = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow 2023x^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2023} + 1}$ (loại nghiệm $x = \frac{1}{1-\sqrt{2023}}$) Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2024 + 2\sqrt{2023}$ khi $x = \frac{1}{\sqrt{2023} + 1}$.	0,25

*** Chú ý:** Các lời giải đúng khác đều được xem xét cho điểm tương ứng.

----- HẾT -----