

Câu I. (2,0 điểm)

1. Cho $x = \frac{\sqrt{5+\sqrt{21}} - \sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{3}}$. Tính giá trị của $P = \left(1 + 2020x^{2020} - 1010x^{2022}\right)^{2021}$
2. Cho phương trình $x^2 - x + a = 0$ (1) có hai nghiệm là x_1, x_2 và phương trình $x^2 - 97x + b = 0$ có hai nghiệm là x_1^4, x_2^4 . Tính giá trị của b

Câu II. (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $3x\sqrt{x^2 + x + 1} = 3x^2 + x + 1$
- 2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=15 \\ (x-y)(x^2-y^2)=3 \end{cases}$$

Câu III. (2,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $y^3 - 3x^2 + 2xy + 8x - 9 = 0$
- 2) Cho a, b, c là ba số nguyên thỏa mãn $a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) = a + b + c$.
Chứng minh rằng : $a + b + c$ chia hết cho 27

Câu IV. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), đường tròn tâm O đường kính $BC = 2R$ cắt AB, AC lần lượt ở E và D ($E \neq B, D \neq C$). Trên cung BC không chứa D lấy điểm F bất kỳ (F khác B và C). Đường thẳng AF cắt BC tại M , cắt đường tròn $(O; R)$ tại N ($N \neq F$) và cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$ tại P (P khác A)

- 1) Chứng minh tứ giác $BEPM$ nội tiếp được trong một đường tròn
- 2) Chứng minh $AN \cdot AF = AP \cdot AM$
- 3) Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của F lên các đường thẳng BD, BC, AC . Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng và tìm vị trí của F sao cho tổng $\frac{BC}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{CD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu V. (1,0 điểm)

Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x > \frac{1}{18}, y > \frac{1}{7}, z > \frac{1}{2020}$ và

$$\frac{18}{18x+17} + \frac{7}{7x+6} + \frac{2020}{2020z+2021} \geq 2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = (18x-1)(7y-1)(2020z+1)$$

ĐÁP ÁN

Câu I.

1) Ta có:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{5+\sqrt{21}} - \sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{21}} - \sqrt{10-2\sqrt{21}}}{\sqrt{6}} \\&= \frac{\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{6}} = \frac{|\sqrt{7}+\sqrt{3}| - |\sqrt{7}-\sqrt{3}|}{\sqrt{6}} \\&= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3} - \sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0\end{aligned}$$

Theo bài ra, ta có:

$$\begin{aligned}P &= \left(1 + 2020x^{2020} - 1010x^{2022}\right)^{2021} \\&= \left[1 - 1010x^{2020}(x^2 - 2)\right]^{2021} = \left[1 - 1010x^{2020} \cdot 0\right]^{2021} = 1^{2021} = 1\end{aligned}$$

Vậy $P = 1$

2) Điều kiện để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 là: $1 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}$

Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm là $97^2 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{97^2}{4}$

Áp dụng định lý Vi – et vào phương trình (1), (2) ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1^4 + x_2^4 = 97 \\ x_1 x_2 = a \leq \frac{1}{4} \\ x_1^4 \cdot x_2^4 = b \leq \frac{97^2}{4} \end{cases} \quad . \text{ Ta có:}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = 97 \Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 97$$

$$\Leftrightarrow \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2\right]^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 97 \Leftrightarrow (1 - 2x_1 x_2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 97$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4x_1 x_2 + 4x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 97 \Leftrightarrow 2x_1^2 x_2^2 - 4x_1 x_2 - 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 = 8(ktm) \\ x_1 x_2 = -6(tm) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = (x_1 x_2)^4 = (-6)^4 = 1296(tm)$$

Vậy $b = 1296$

Câu II.

1) Giải phương trình $3x\sqrt{x^2 + x + 1} = 3x^2 + x + 1$

Ta có: $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$; $3x^2 + x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} > 0 \Rightarrow 3x > 0 \Rightarrow x > 0$

Ta có:

$$3x\sqrt{x^2 + x + 1} = 3x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 3x(x - \sqrt{x^2 + x + 1}) + (x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x \cdot \frac{x^2 - (x^2 + x + 1)}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} + (x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1) \left(\frac{-3x}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} + 1 = 0 \text{ (do } x > 0) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + x + 1} = 3x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} (tm) \\ x = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} (ktm) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \\ (x - y)(x^2 - y^2) = 3 \end{cases}$. Ta có

$$\begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \\ (x - y)(x^2 - y^2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \\ 5(x - y)^2(x + y) = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \\ 5(x - y)^2(x + y) - (x + y)(x^2 + y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \\ (x + y)(2x^2 - 5xy + 2y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \\ (x + y)(x - 2y)(2x - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \\ \begin{cases} x = -y \\ x = 2y \\ 2x = y \end{cases} \end{cases}$$

$$*) \begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=15 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.(x^2+y^2)=15 \\ x=-y \end{cases} (VN)$$

$$*) \begin{cases} x=2y \\ (x+y)(x^2+y^2)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ y^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$*) \begin{cases} 2x-y=0 \\ (x+y)(x^2+y^2)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=1 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(2; 1); (1; 2)\}$

Câu III.

1) Ta có: $y^2 - 3x^2 + 2xy + 8x - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2xy + y^2) - (4x^2 - 8x + 4) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - (2x-2)^2 = 5 \Leftrightarrow (x+y-2x+2)(x+y+2x-2) = 5$$

$$\Leftrightarrow (-x+y+2)(3x+y-2) = 5$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $3x+y-2; -x+y+2 \in \mathbb{Z}; 3x+y-2; -x+y+2 \in U(5)$

Do đó ta có các trường hợp sau:

$$*) \begin{cases} 3x+y-2=1 \\ -x+y+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=3 \\ -x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$$

$$*) \begin{cases} 3x+y-2=5 \\ -x+y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=7 \\ -x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$*) \begin{cases} 3x+y-2=-1 \\ -x+y+2=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=1 \\ -x+y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$$

$$*) \begin{cases} 3x+y-2=-5 \\ -x+y+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=-3 \\ -x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm:

$$(x; y) \in \{(0; 3); (0; -3); (2; 1); (2; -5)\}$$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} a+b+c &= a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) \\ &= a^2(c-b) + b^2[-(c-b) - (b-a)] + c^2(b-a) \\ &= a^2(c-b) - b^2(c-b) + c^2(b-a) - b^2(b-a) \\ &= (c-b)(a^2 - b^2) + (b-a)(c^2 - b^2) \end{aligned}$$

$$= (c-b)(a-b)(a+b) - (a-b)(c-b)(c+b)$$

$$= (a-b)(c-b)(a+b-c-b)$$

$$= (a-b)(c-b)(a-c) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\Rightarrow a+b+c = (a-b)(b-c)(c-a) \text{ khi chia cho 3 là :}$$

Nếu a, b, c có 3 số dư khác nhau (0,1,2) thì

$$(a-b)(b-c)(c-a) \text{ không chia hết cho 3 còn } a+b+c : 3$$

$$\Rightarrow a+b+c \neq (a-b)(b-c)(c-a) \text{ (trái giả thiết)}$$

Nếu a, b, c có 2 số có cùng số dư khi chia cho 3 thì

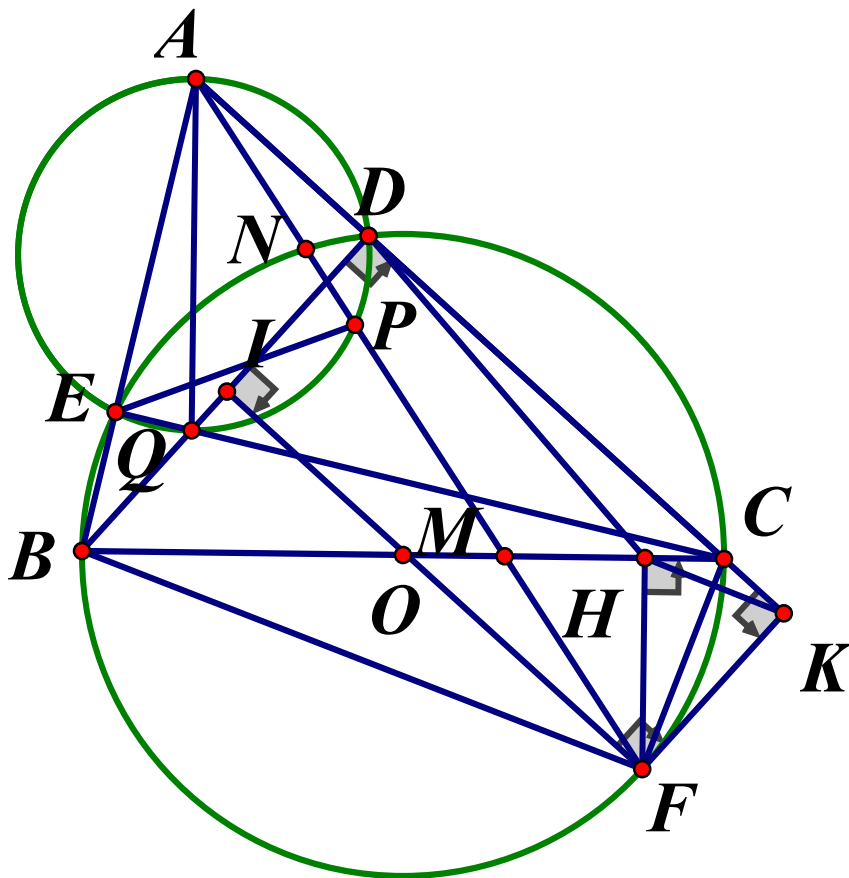
$$(a-b)(b-c)(c-a) : 3 \text{ còn } a+b+c \text{ không chia hết cho 3}$$

$$\Rightarrow a+b+c \neq (a-b)(b-c)(c-a) \text{ (trái giả thiết)}$$

$$\text{Do đó } a, b, c \text{ đều chia hết cho 3} \Rightarrow a+b+c = (a-b)(b-c)(c-a) : [(3.3.3) = 27]$$

$$\text{Vậy } (a+b+c) : 27$$

Câu IV.



1) Vì tứ giác $BCDE$ nội tiếp đường tròn đường kính BC nên:

$\angle ADE = \angle ABC$ (góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

Mà $\angle APE = \angle ADE$ (cùng chắn cung AE) $\Rightarrow \angle APE = \angle ABC$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BEPM$ là tứ giác nội tiếp

2) Vì tứ giác $BEPM$ nội tiếp nên $AP \cdot AM = AE \cdot AB$ (1)

Vì tứ giác $ADCF$ nội tiếp đường tròn (O) nên $AN \cdot AF = AD \cdot AC$ (2)

Vì tứ giác $BCDE$ nội tiếp (O) nên $AE \cdot AB = AD \cdot AC$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AN \cdot AF = AP \cdot AM$ (dpcm)

3) Chứng minh được tứ giác $CHFK$ nội tiếp $\Rightarrow \angle CHK = \angle CFK$ (4) (cùng chắn CK)

Chứng minh được tứ giác $BIHF$ nội tiếp $\Rightarrow \angle BFI = \angle BHI$ (5) (cùng chắn BI)

Chứng minh được tứ giác $DIFK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \angle IFK = 90^\circ$

Mà $\angle BFC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle HFK = \angle BFC \Rightarrow \angle BFI = \angle CFK$ (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra $\angle CHK = \angle BHI$

Mà $\angle CHK + \angle BHK = 180^\circ \Rightarrow \angle BHI + \angle BHK = 180^\circ \Rightarrow 3$ điểm I, H, K thẳng hàng

Ta có:

$$\frac{BD}{FI} + \frac{CD}{FK} = \frac{BI + ID}{DK} + \frac{DK - KC}{DI} = \frac{ID}{DK} + \frac{DK}{DI} \quad (7)$$

$$(\text{Vì } FI = DK, FK = DI, \angle BFI = \angle CFK \rightarrow \tan \angle BFI = \tan \angle CFK \Rightarrow \frac{BI}{IF} = \frac{CK}{KC} \Rightarrow \frac{BI}{BK} = \frac{ID}{DK})$$

$$\text{Do } \angle DKI = \angle CFH \Rightarrow \tan \angle DKI = \tan \angle CFH \Rightarrow \frac{ID}{DK} = \frac{CH}{FH} \quad (8)$$

$$\text{Do } \angle DKI = \angle HBK (= \angle FIH) \Rightarrow \cot \angle DKI = \cot \angle HBK \Rightarrow \frac{DK}{DI} = \frac{BH}{HF} \quad (9)$$

$$\text{Từ (7), (8), (9)} \Rightarrow \frac{BD}{FI} + \frac{CD}{FK} = \frac{CH}{FH} + \frac{BH}{HF} = \frac{BC}{FH}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{CD}{FK} = 2 \cdot \frac{BC}{FH} \geq 2 \cdot \frac{BC}{FO} = \frac{2 \cdot 2R}{R} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{CD}{FK} \text{ đạt GTNN bằng } 4 \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow F \text{ là điểm chính giữa cung BC}$$

không chứa D .

Câu V. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{18}{18x+17} &\geq 1 - \frac{7}{7y+6} + 1 - \frac{2020}{2020z+2021} \\ &= \frac{7y-1}{7y+6} + \frac{2020z+1}{2020z+2021} \geq 2\sqrt{\frac{7y-1}{7y+6} \cdot \frac{2020z+1}{2020z+2021}} \quad (1) \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{7}{7y+6} \geq 2\sqrt{\frac{18x-1}{18x+17} \cdot \frac{2020z+1}{2020z+2021}} \quad (2);$$

$$\frac{2020}{2020z+2021} \geq 2\sqrt{\frac{18x-1}{18x+17} \cdot \frac{7y-1}{7y+6}} \quad (3)$$

Nhân (1),(2),(3) về theo về ta được:

$$\frac{18 \cdot 7 \cdot 2020}{(18x-1)(7y-1)(2020z+1)} \geq 8 \cdot \frac{(18x-1)(7y-1)(2020z+1)}{(18x-1)(7y-1)(2020z+1)}$$

$$\Rightarrow (18x-1)(7y-1)(2020z+1) \leq \frac{18 \cdot 7 \cdot 2020}{8} = 31815$$

$$\Rightarrow A \leq 31815. \text{ Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{5}{9}; y = \frac{9}{14}; z = \frac{1009}{2020}$$

$$\text{Vậy } \text{Max } A = 31815 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{9} \\ y = \frac{9}{14} \\ z = \frac{1009}{2020} \end{cases}$$