

Câu 1. (2,00 điểm)

a) Không dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị biểu thức

$$T = \frac{\sqrt{2} \left(1 + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \right)}{2\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2} \left(1 + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} \right)}{2\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

b) Với mọi số nguyên dương n , chứng minh $A = \sqrt{n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2}$ là số nguyên dương nhưng không là số chính phương.

Câu 2. (2,00 điểm)

Cho các phương trình (ẩn x) $ax^2 - bx + c = 0$ (1) và $cx^2 - bx + a = 0$ (2) với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a - b + 4c = 0$.

a) Chứng minh các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm dương phân biệt.

b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1) và $x_3; x_4$ là hai nghiệm của phương trình (2).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3 x_4} + \frac{1}{x_3 x_1 x_1} + \frac{1}{x_4 x_1 x_2}$.

Câu 3. (1,50 điểm)

a) Phân tích đa thức $P(x, y) = 4x^3 - 3xy^2 + y^3$ thành nhân tử. Từ đó chứng minh $4x^2 + y^3 \geq 3xy^2$ với mọi số thực $x; y$ thỏa mãn $x + y \geq 0$.

b) Cho các số thực $x_1; x_2; \dots, x_{21}$ thỏa mãn $x_1; x_2; \dots; x_{21} \geq -2$ và $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_{21}^3 = 12$. Chứng minh $x_1 + x_2 + \dots + x_{21} \leq 18$

Câu 4. (3,00 điểm)

Cho ΔABC vuông tại A . Các đường tròn (O) đường kính AB , và (I) đường kính AC cắt nhau tại điểm thứ hai là $H (H \neq A)$. Đường thẳng (d) thay đổi đi qua A cắt đường tròn (O) tại M và cắt đường tròn (I) tại N (A nằm giữa hai điểm M và N).

a) Đoạn thẳng OI lần lượt cắt các đường tròn (O) , (I) lần lượt tại D, E . Chứng minh OI là đường trung trực của đoạn thẳng AH và $AB + AC - BC = 2DE$.

b) Chứng minh giao điểm S của hai đường thẳng OM và IN di chuyển trên một đường tròn cố định khi đường thẳng (d) quay quanh A .

c) Giả sử đường thẳng MH cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là $T (T \neq H)$. Chứng minh rằng ba điểm N, I, T thẳng hàng và ba đường thẳng MS, AT, NH đồng quy.

Câu 5. (1,50 điểm)

a) Hai số tự nhiên khác nhau được gọi là "thân thiết" nếu tổng bình phương của chúng chia hết cho 3. Hỏi tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 2021\}$ có bao nhiêu cặp số "thân thiết" (không phân biệt thứ tự)?

b) Trong kỳ thi chọn đội tuyển năng khiếu của trường T có n môn ($n \in \mathbb{N}, n \geq 5$), mọi môn thi đều có thí sinh tham gia và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- Có ít nhất 5 môn có số lượng thí sinh tham gia thi đôi một khác nhau;

- Với 2 môn thi bất kì, luôn tìm được 2 môn thi khác có tổng số lượng thí sinh tham gia bằng với tổng số lượng thí sinh của 2 môn đó. Hỏi kỳ thi có ít nhất bao nhiêu môn được tổ chức?

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

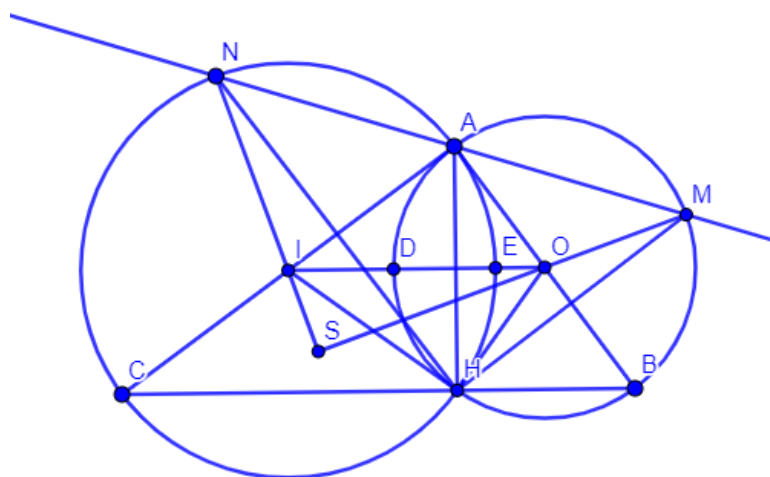
Bài	Ý	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2,00 điểm)	a)	<i>Không dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị biểu thức</i>	1,00
		$T = \frac{\sqrt{2} \left(1 + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}\right)}{2\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2} \left(1 + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}\right)}{2\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$	0,25
		$T = \frac{\sqrt{2} \left(1 + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}\right)}{2\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2} \left(1 + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}\right)}{2\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$ $= \frac{2 \left(1 + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}\right)}{4 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \frac{2 \left(1 + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}\right)}{4 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}$ $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1$ $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1$	0,25
		$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{3})^3} = 1 + \sqrt{3}$ $\sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(1 - \sqrt{3})^3} = 1 - \sqrt{3}$	0,25
		Suy ra	0,50

	$T = \frac{2(1+1+\sqrt{3})}{4+\sqrt{3}+1} + \frac{2(1+1-\sqrt{3})}{4-\sqrt{3}+1}$ $= \frac{4+2\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} + \frac{4-2\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$ $= \frac{(4+2\sqrt{3})(5-\sqrt{3})}{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})} + \frac{(4-2\sqrt{3})(5+\sqrt{3})}{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})}$ $= \frac{14+6\sqrt{3}}{22} + \frac{14-6\sqrt{3}}{22}$ $= \frac{28}{22} = \frac{14}{11}$ Vậy $T = \frac{14}{11}$	
	Với mọi số nguyên dương n, chứng minh $A = \sqrt{n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2}$ là số nguyên dương nhưng không phải là số chính phương.	1,00
	$A = \sqrt{n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2}$ $= \sqrt{n^2 + n^2(n^2 + 2n + 1) + n^2 + 2n + 1}$ $= \sqrt{n^2 + n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2 + 2n + 1}$ $= \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1}$ $= \sqrt{(n^2 + n + 1)^2}$ b) Vì n dương nên $n^2 + n + 1 > 0$ Do đó $A = \sqrt{(n^2 + n + 1)^2} = n^2 + n + 1$. Vì n nguyên dương nên $A = n^2 + n + 1$ cũng là số nguyên dương.	0,75
	Vì n nguyên dương, ta có: $A = n^2 + n + 1 > n^2$ $A = n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ $\Rightarrow n^2 < A < (n+1)^2$ Suy ra A không là một số chính phương.	0,25

Câu 2 (2,00 điểm)		Cho các phương trình (ẩn x) $ax^2 - bx + c = 0$ (1) và $cx^2 - bx + a = 0$ (2) với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a - b + 4c = 0$. Chứng minh các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm dương phân biệt.	1,00
	a)	$a - b + 4c = 0 \Leftrightarrow b = a + 4c$ $\Delta_1 = \Delta_2 = b^2 - 4ac = (a + 4c)^2 - 4ac$ $= a^2 + 4ac + 16c^2 = (a + 2c)^2 + 12c^2$ $\Rightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ Suy ra các phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt.	0,50
		Theo định lý Vi-ét ta có: $S_1 = \frac{b}{a}, S_2 = \frac{b}{c}, P_1 = \frac{c}{a}, P_2 = \frac{a}{c}$ Vì a, b, c là các số thực dương nên S_1, S_2, P_1, P_2 đều lớn hơn 0. Ta có: $\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ S_1 > 0 \Rightarrow \text{Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt.} \\ P_1 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \Delta_2 > 0 \\ S_2 > 0 \Rightarrow \text{Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt.} \\ P_2 > 0 \end{cases}$	0,50
	b)	Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1), $x_3; x_4$ là hai nghiệm của phương trình (2). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3 x_4} + \frac{1}{x_3 x_4 x_1} + \frac{1}{x_4 x_1 x_2}$.	1,00
		Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}; x_3 + x_4 = \frac{b}{c}; x_3 x_4 = \frac{a}{c}$	0,25

		$T = \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3 x_4} + \frac{1}{x_3 x_4 x_1} + \frac{1}{x_4 x_1 x_2}$ $= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{x_1 x_2 x_3 x_4}$ $= \frac{\frac{b}{c} + \frac{b}{c}}{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}}$ $= \frac{b}{a} + \frac{b}{c}$	0,25
		$= \frac{a+4c}{a} + \frac{a+4c}{c}$ $= 5 + \frac{4c}{a} + \frac{a}{c}$	0,25
		Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $T = 5 + \frac{4c}{a} + \frac{a}{c} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 9.$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = 2c, b = 6c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 9.	0,25
Câu 3 (1,50 điểm)	a)	Phân tích đa thức $P(x, y) = 4x^3 - 3xy^2 + y^3$ thành nhân tử. Từ đó chứng minh $4x^3 + y^3 \geq 3xy^2$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $x + y \geq 0$.	0,75
		$P(x, y) = 4x^3 - 3xy^2 + y^3$ $= 4x^3 - 4xy^2 + xy^2 + y^3$ $= 4x(x^2 - y^2) + y^2(x + y)$ $= 4x(x + y)(x - y) + y^2(x + y)$ $= (x + y)(4x^2 - 4xy + y^2)$ $= (x + y)(2x - y)^2$	0,50
		Với mọi số thực x, y thỏa mãn $x + y \geq 0$, ta có: $(x + y)(2x - y)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow 4x^3 - 3xy^2 + y^3 \geq 0$ $\Leftrightarrow 4x^3 + y^3 \geq 3xy^2$	0,25

		Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 2x \end{cases}$	
		Cho các số thực $x_1; x_2; \dots; x_{21}$ thỏa mãn $x_1; x_2; \dots; x_{21} \geq -2$ và $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{21}^3 = 12$. Chứng minh $x_1 + x_2 + \dots + x_{21} \leq 18$.	0,75
		Với mọi i có giá trị từ 1 đến 21, ta có: $x_i + 2 \geq 0$ $\Leftrightarrow (x_i + 2)(x_i - 1)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow x_i^3 - 3x_i + 2 \geq 0$ $\Leftrightarrow x_i^3 + 2 \geq 3x_i (*)$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x_i = 1$ hoặc $x_i = -2$.	0,25
	b)	Áp dụng bất đẳng thức $(*)$ ta có: $x_1^3 + 2 \geq 3x_1$ $x_2^3 + 2 \geq 3x_2$... $x_{21}^3 + 2 \geq 3x_{21}$ Suy ra $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{21}^3 + 42 \geq 3(x_1 + x_2 + \dots + x_{21})$ $\Leftrightarrow 54 \geq 3(x_1 + x_2 + \dots + x_{21})$ $\Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{21} \leq 18$ Dấu “=” xảy ra khi có 1 số bằng -2 và 20 số còn lại bằng 1. (không chỉ ra dấu “=” trừ 0,25)	0,50
Câu 4 (3,00 điểm)	a)	Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Các đường tròn (O) đường kính AB và (I) đường kính AC cắt nhau tại điểm thứ hai là H ($H \neq A$). Đường thẳng (d) thay đổi đi qua A cắt đường tròn (O) tại M và cắt đường tròn (I) tại N (A nằm giữa M và N). Đoạn thẳng OI lần lượt cắt các đường tròn $(O), (I)$ lần lượt tại D, E. Chứng minh OI là đường trung trực của đoạn thẳng AH và $AB + AC - BC = 2DE$.	1,00



Ta có:

$$OA = OH \text{ (cùng là bán kính của } (O) \text{)}$$

$$IA = IH \text{ (cùng là bán kính của } (I) \text{)}$$

Suy ra OI là đường trung trực của đoạn thẳng AH .

0,25

Ta có:

$$OD = OA = OB = \frac{1}{2} AB \Rightarrow O \text{ là trung điểm } AB.$$

$$IE = IA = IC = \frac{1}{2} AC \Rightarrow I \text{ là trung điểm } AC.$$

0,25

Xét $\triangle ABC$ ta có:

O là trung điểm AB

I là trung điểm AC

Suy ra OI là đường trung bình của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow OI = \frac{1}{2} BC.$$

0,25

$$DE = OD + IE - OI = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} BC$$

$$\Leftrightarrow 2DE = AB + AC - BC$$

0,25

b)

Chứng minh rằng giao điểm S của OM và IN di chuyển trên một đường tròn cố định khi đường thẳng (d) quay quanh A .

1,00

Ta có: $\angle AHB = \angle AHC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

0,25

	Suy ra $\angle BHC = \angle AHB + \angle AHC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ Suy ra B, H, C thẳng hàng. Lại có $\angle AHB = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$.	
	$\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$ $\angle NMH = \angle ABC$ (cùng chắn cung AH) $\angle MNH = \angle ACB$ (cùng chắn cung AH) Suy ra $\angle MNH + \angle NMH = \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle HMN$ vuông tại $H \Rightarrow \angle MHN = 90^\circ$.	0,25
	$\angle SNM = \angle IAN = \angle NHC$ $\angle SMN = \angle OAM = \angle BHM$ Suy ra $\angle SMN + \angle SNM = \angle CHN + \angle BHM = 180^\circ - \angle MHN$ $= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle SMN$ vuông tại $S \Rightarrow \angle MSN = 90^\circ$ hay $\angle ISO = 90^\circ$	0,25
	Suy ra S thuộc đường tròn đường kính OI. Mà O và I cố định nên đường tròn đường kính OI cố định. Vậy S di chuyển trên đường tròn đường kính OI cố định khi đường thẳng (d) quay quanh A.	0,25
	Giả sử MH cắt (I) tại điểm thứ hai T ($T \neq H$). Chứng minh ba điểm N, I, T thẳng hàng và ba đường thẳng MS, AT, NH đồng quy.	1,00
c)		
	Ta có $\angle MHN = 90^\circ \Rightarrow \angle THN = 90^\circ \Rightarrow TN$ là đường kính	0,25

		của (I) $\Rightarrow N, I, T$ thẳng hàng.	
		NT là đường kính của $(I) \Rightarrow \angle NAT = 90^\circ \Rightarrow TA \perp NM$	0,25
		$\angle THN = 90^\circ \Rightarrow NH \perp MT$ $\angle MSN = 90^\circ \Rightarrow MS \perp NT$	0,25
		Xét $\triangle MNT$ ta có MS, NH, AT là ba đường cao. Do đó MS, NH, AT đồng quy.	0,25
Câu 5 (1,50 điểm)		Hai số tự nhiên khác nhau được gọi là “thân thiết” nếu tổng bình phương của chúng chia hết cho 3. Hỏi tập hợp $X = \{1; 2; \dots; 2021\}$ có bao nhiêu cặp số “thân thiết” (không phân biệt thứ tự)?	0,75
	a)	Ta có nhận xét: Một số chính phương khi chia cho 3 sẽ có số dư là 0 hoặc 1. Giả sử a và b là hai số “thân thiết” $\Rightarrow a^2 + b^2 : 3$. Ta sẽ chứng minh cả a và b đều chia hết cho 3. Thật vậy, giả sử trong hai số a và b có một số không chia hết cho 3. Không mất tính tổng quát, giả sử số đó là a . Suy ra a^2 chia 3 dư 1. Vì $a^2 + b^2 : 3$ và a^2 chia 3 dư 1 nên b^2 phải chia 3 dư 2. Điều này vô lí vì b^2 khi chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1. Vậy điều giả sử là sai. Do đó nếu a và b là hai số “thân thiết” thì a và b đều chia hết cho 3.	0,50
		Tập hợp X có $\left[\frac{2021}{3} \right] = 673$ số chia hết cho 3. Số cặp số “thân thiết” là $\frac{673 \cdot 672}{2} = 226128$.	0,25
	b)	Trong kỳ thi chọn đội tuyển năng khiếu của trường T có n môn ($n \in \mathbb{N}, n \geq 5$), mọi môn thi đều có thí sinh tham gia và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: - Có ít nhất 5 môn có số lượng thí sinh tham gia đôi một khác nhau. - Với 2 môn thi bất kì, luôn tìm được 2 môn thi khác có tổng số lượng thí sinh tham gia bằng với tổng số lượng thí sinh của 2	0,75

	môn đó. Hỏi kỳ thi có ít nhất bao nhiêu môn được tổ chức?	
	Gọi $n[i]$ là số môn thi có số lượng thí sinh tham gia là $i (i, n[i] \in \mathbb{N})$. Gọi $S = \{i \mid i > 0, n[i] > 0\}$. Do có ít nhất 5 môn có số lượng thí sinh tham gia đôi một khác nhau nên S có ít nhất 5 phần tử.	0,25
	Giả sử $a, b (a > b)$ là 2 phần tử lớn nhất của S và $d, e (d > e)$ là hai phần tử nhỏ nhất của S. Rõ ràng $n[a], n[b], n[d], n[e]$ đều lớn hơn hoặc bằng 1. Lấy 1 môn có số lượng thí sinh tham gia là a và 1 môn có số lượng thí sinh là b. Theo điều kiện 2, tồn tại hai môn khác có tổng số lượng thí sinh tham gia là $a + b$. Vì $a, b (a > b)$ là 2 phần tử lớn nhất của S nên hai môn khác này phải có 1 môn có số lượng thí sinh là a, 1 môn có số lượng thí sinh là b, dẫn đến $n[a] \geq 2, n[b] \geq 2$. Lại lấy 2 môn có số lượng thí sinh tham gia là a. Theo điều kiện 2, tồn tại hai môn khác có tổng số lượng thí sinh tham gia là $2a$. Vì a là phần tử lớn nhất của S nên hai môn khác này phải có số lượng thí sinh là a, dẫn đến $n[a] \geq 4$. Lập luận tương tự ta cũng có $n[d] \geq 2, n[e] \geq 4$. Vì S có ít nhất 5 phần tử nên ta lấy trường hợp ít nhất, S có 5 phần tử là $a, b, c, d, e \Rightarrow n[c] \geq 1$. Vậy kỳ thi đó có ít nhất $4 + 2 + 1 + 2 + 4 = 13$ môn thi. Ta có thể chỉ ra một trường hợp là số thí sinh dự thi các môn lần lượt là 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5. (không lấy ví dụ trừ 0,25)	0,50