

Bài 1. 1) Cho hai biểu thức $A = (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

$$B = \sqrt{6+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

a) Rút gọn các biểu thức A và B

b) Chứng minh rằng $A+B$ chia hết cho 9

2) Cho đa thức $P(x): 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. Chứng minh rằng với hai số thực a, b thỏa mãn

$$a+b=1 \text{ thì } P(a)+P(b)=1. \text{ Từ đó tính tổng } S = P\left(\frac{1}{2023}\right) + P\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + P\left(\frac{2022}{2023}\right)$$

Bài 2. Trong cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + 8$

a) Bằng phép tính, hãy tìm tọa độ giao điểm A, B của parabol (P) và đường thẳng (d).

b) Tìm tọa độ tất cả các điểm nằm trên (P) sao cho điểm đó cách đều hai điểm A và B.

Bài 3. 1) Giải phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1 + \sqrt{1-x^2}$

$$2) \text{ Cho phương trình } mx^2 - (2m-1)x + \frac{3}{4}m - 1 = 0 \text{ (m là tham số)}$$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm $x_1; x_2$ không phụ thuộc vào m.

Bài 4. a) Cho a là số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{a^3+1}{a} \geq 2\sqrt{a}$

b) Cho a, b là số thực dương thỏa mãn $a+b=2$

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{1}{ab} \left(\frac{a^3+1}{\sqrt{a}} + \frac{b^3+1}{\sqrt{b}} \right)$$

Bài 5. Giả sử $n = abc$ với a, b, c là ba số nguyên tố phân biệt.

a) Liệt kê các ước nguyên dương của n và chứng minh tổng các ước đó bằng

$$(1+a)(1+b)(1+c)$$

b) Biết tổng tất cả các ước dương của n bằng $2n+12$. Chứng minh rằng n chia hết cho 6.

Bài 6. Một vựa trái cây đã bán ra 60 thùng trái cây (bao gồm loại 1 và loại 2) thu về tổng cộng 55 triệu đồng. Biết rằng giá mỗi thùng trái cây loại 1 tính theo triệu đồng là một số nguyên dương và giá mỗi thùng trái cây loại 2 được bán chỉ bằng một nửa giá mỗi thùng trái cây loại 1. Hỏi giá bán của mỗi thùng trái cây loại 1 là bao nhiêu triệu đồng?

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC < BC$) nội tiếp đường tròn (O). Dựng hình bình hành ABDC. Các đường thẳng DB, DC lần lượt cắt đường thẳng (O) tại các điểm thứ hai là P, Q.

a) Chứng minh rằng $\widehat{CPD} = \widehat{ABQ}$

b) Gọi M là giao điểm của PQ và QB, đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD cắt AD tại E (E khác D). Chứng minh rằng $\widehat{MED} = \widehat{APQ}$, từ đó suy ra tứ giác AEPM nội tiếp.

c) Gọi $I_1; I_2$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEPM và tam giác PQD.

Chứng minh rằng điểm E thuộc đường tròn (I_2) và $I_1I_2 \perp PE$.