

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH PHÚC**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

**KỶ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2023-2024**

MÔN THI: TOÁN

(Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và chuyên Tin học)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu I. (2,0 điểm) Giải các phương trình sau:

1. $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)=160$

2. $x^2 + 3x + 8 = 2(x+1)\sqrt{x+7}$

Câu II. (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + \frac{x+2y}{xy} = 6 \\ x^2 + y^2 + \frac{x^2 + 4y^2}{(xy)^2} = 14 \end{cases}$$

Câu III. (2,0 điểm)

- Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức $(y+2)x^2 + 1 = y^2$
- Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $3n+1$, $11n+1$ là các số chính phương và $n+3$ số nguyên tố.

Câu IV. (1,0 điểm)

- Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức: $P = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

- Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca+abc \leq 4$. Chứng minh rằng $a+b+c \geq ab+bc+ca$.

Câu V. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm E . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại điểm N ($N \neq A$). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm B, C cắt nhau tại điểm D .

- Chứng minh $AOND$ là tứ giác nội tiếp và tia DO là phân giác của góc $\widehat{ADN}$.

2. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm P ($P \neq A$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME cắt đường tròn (O) tại điểm F ($F \neq A$). Chứng minh $AB.PC = AC.PB$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng.
3. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O) . Chứng minh 3 điểm D, K, F thẳng hàng và đường thẳng FN đi qua trung điểm của đoạn thẳng DM .

Câu VI. (1,0 điểm)

Sau khi tổ chức một trận đấu giao hữu giữa hai đội bóng lớp 9A và 9B, ban tổ chức có 11 gói kẹo muốn chia cho 2 đội. Mỗi đội được chia 5 gói làm phần thưởng và 1 gói ban tổ chức giữ lại để liên hoan. Biết rằng dù chọn bất kì gói nào để giữ lại, ban tổ chức luôn có thể chia 10 gói còn lại cho 2 đội mà tổng số viên kẹo trong 5 gói cho mỗi đội là bằng nhau. Chứng minh rằng 11 gói kẹo đó phải có số viên kẹo bằng nhau.

----- HẾT -----

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH PHÚC**

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
CHUYÊN TOÁN NĂM HỌC 2023-2024**

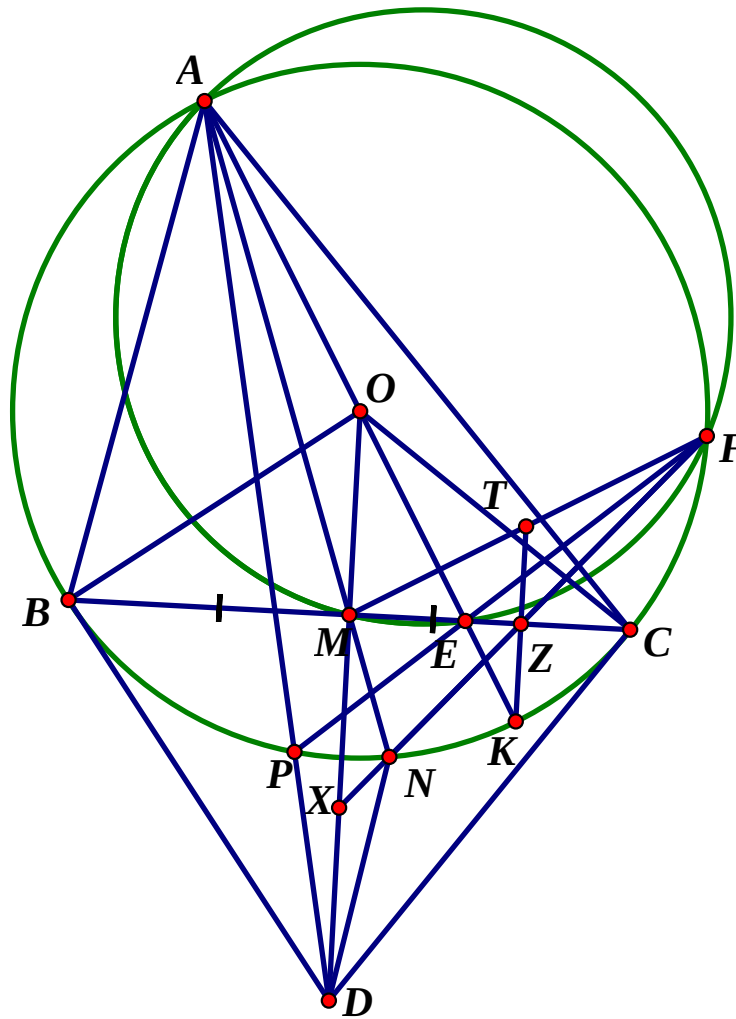
Câu	Lời giải và đáp án	Điểm
I	1. $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6) = 160$ $\Leftrightarrow [(x-1)(x+6)][(x+2)(x+3)] = 160$ $\Leftrightarrow (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = 160$ $\Leftrightarrow (x^2 + 5x)^2 - 36 = 160 \Leftrightarrow (x^2 + 5x)^2 = 196$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x = 14 \\ x^2 + 5x = -14 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$ $\Leftrightarrow (x+7)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = 2 \end{cases}$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2; -7\}$	1,0 đ
	2. $x^2 + 3x + 8 = 2(x+1)\sqrt{x+7} \quad (*)$ ĐKXĐ: $x \geq -7$ $(*) \Leftrightarrow (x+1)^2 + x + 7 - 2(x+1)\sqrt{x+7} = 0$ $\Leftrightarrow (x+1-\sqrt{x+7})^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{x+7}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = -3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (TM ĐKXĐ)}$ Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2\}$	1,0đ
II	$\begin{cases} x + y + \frac{x+2y}{xy} = 6 \\ x^2 + y^2 + \frac{x^2 + 4y^2}{(xy)^2} = 14 \end{cases} \quad \text{(I)}$ ĐKXĐ: $x, y \neq 0$	1,0đ

	$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \frac{1}{y} + \frac{2}{x} = 6 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{4}{x^2} = 14 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{x} + y + \frac{1}{y} = 6 \\ \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = 20 \end{cases}$ Đặt $x + \frac{2}{x} = a, y + \frac{1}{y} = b$ Ta có hệ $\begin{cases} a + b = 6 \\ a^2 + b^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = 4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ a - b = 2 \\ a - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4, b = 2 \\ a = 2, b = 4 \end{cases}$ • $a = 4, b = 2$ $\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{x} = 4 \\ y + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} (TMĐK)$ • $a = 2, b = 4$ $\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{x} = 2 \\ y + \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 2 = 0 \\ y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases} (\text{vô nghiệm})$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) \left\{ (2 + \sqrt{2}; 1), (2 - \sqrt{2}; 1) \right\}$	
III	1. $(y + 2)x^2 + 1 = y^2 (1)$ $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y^2 - 1 : y + 2$ $\Leftrightarrow (y^2 - 4) + 3 : y + 2$ $\Leftrightarrow 3 : y + 2$ $\Rightarrow y + 2 \in \{\pm 3; \pm 1\}$	1,0đ

	$\Rightarrow y \in \{1; -5; -1; -3\}$ $y = 1$ thay vào (1) $\Rightarrow x = 0$ thoả mãn $y = -5$ thay vào (1) $\Rightarrow x^2 = -8$ loại $y = -1$ thay vào (1) $\Rightarrow x = 0$ thoả mãn $y = -3$ thay vào (1) $\Rightarrow x^2 = -8$ loại Vậy $(x; y) \in \{(0; 1); (0; -1)\}$	
	2. $\begin{cases} 3n+1=a^2 \\ 11n+1=b^2 \end{cases}$ $\Rightarrow n+3=4a^2-b^2=(2a-b)(2a+b)$ $a, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2a+b > 0 > 2a-b$ $n+3 \text{ là số nguyên tố} \Rightarrow \begin{cases} 2a-b=1 \\ 2a+b=n+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{n+4}{4} \\ b=\frac{n+2}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow 11n+1=b^2=\left(\frac{n+2}{2}\right)^2$ $\Leftrightarrow n^2=40n$ $\Leftrightarrow n=40$	1,0đ
IV	1. Ta có: $P = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ $= \frac{2a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}$ $= \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$ $= \sqrt{\frac{2a}{a+b} \cdot \frac{2a}{a+c}} + \sqrt{\frac{2b}{b+a} \cdot \frac{b}{2(b+c)}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a} \cdot \frac{c}{2(c+b)}}$ AM – GM $\leq \frac{1}{2} \left[\frac{2a}{a+b} + \frac{2a}{a+c} + \frac{2b}{b+a} + \frac{b}{2(b+c)} + \frac{2c}{c+a} + \frac{c}{2(c+b)} \right]$	0,5đ

	$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{a+b} \right) + \left(\frac{2a}{a+c} + \frac{2a}{a+c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) \right]$ $= \frac{1}{2} \left(2 + 2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{4}$ Dấu “=” xảy ra khi $a = \frac{7\sqrt{15}}{15}; b = c = \frac{\sqrt{15}}{15}$ Vậy P đạt GTLN là $\frac{9}{4}$ khi $a = \frac{7\sqrt{15}}{15}; b = c = \frac{\sqrt{15}}{15}$	
	2. Ta có $ab + bc + ca + abc \leq 4$ $\Leftrightarrow abc + 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) + 8 \leq (ab + 2a + 2b + 4) + (bc + 2b + 2c + 4) + (ca + 2c + 2a + 4)$ $\Leftrightarrow (a+2)(b+2)(c+2) \leq (a+2)(b+2) + (b+2)(c+2) + (c+2)(a+2)$ $\Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} \Leftrightarrow \frac{2}{a+2} + \frac{2}{b+2} + \frac{2}{c+2} \geq 2$ $\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{a+2} \right) + \left(1 - \frac{2}{b+2} \right) + \left(1 - \frac{2}{c+2} \right) \leq 1$ $\Leftrightarrow 1 \geq \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2}$ Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz $1 \geq \frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} = \frac{a^2}{a^2+2a} + \frac{b^2}{b^2+2b} + \frac{c^2}{c^2+2c}$ $C-S \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)}$ $\Rightarrow (a+b+c)^2 \leq (a^2+b^2+c^2) + 2(a+b+c)$ $\Leftrightarrow a+b+c \geq ab+bc+ca \text{ (đpcm)}$	0,5đ

V



1. Xét đường tròn (O): $BD \perp BO, CD \perp CO$ (tính chất tiếp tuyến)

$$\Rightarrow \widehat{DBO} = \widehat{DCO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DBO} + \widehat{DCO} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác OBDC nội tiếp

Lại có $OB = OC, MB = MC, DB = DC$

$\Rightarrow O, M, D$ cùng thuộc trung trực của đoạn BC

Suy ra $MO.MD = MB.MC$

Mà tứ giác ABNC nội tiếp $\Rightarrow MB.MC = MA.MN$

$\Rightarrow MO.MD = MA.MN \Rightarrow$ Tứ giác AOND nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{ADO} = \frac{1}{2} s\widehat{\overset{\circ}{A}} = \frac{1}{2} s\widehat{\overset{\circ}{N}} = \widehat{ODN}$$

$\Rightarrow DO$ là phân giác $\widehat{ADN}$

b) Xét $\triangle DBP$ và $\triangle DAB$ có

$$\widehat{BDP} \text{ chung; } \widehat{DBP} = \widehat{DAB}$$

	$\Rightarrow \triangle DBP \sim \triangle DAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{BP} = \frac{AD}{DB}$ Tương tự ta có $\triangle DCP \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{AC}{CP} = \frac{AD}{DC}$ $\Rightarrow \frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP} \Rightarrow AB.CP = AC.BP$ Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác ABPC nội tiếp ta có $AP.BC = AB.CP + AC.BP$ $\Rightarrow 2AP.CM = 2AC.BP \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{BP}{CM}$ $\triangle ABP$ và $\triangle AMC$ có $\frac{AP}{AC} = \frac{BP}{CM}$; $\widehat{APB} = \widehat{ACM}$ $\Rightarrow \triangle ABP \sim \triangle AMC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{AMC}$ Lại có tứ giác ABPF nội tiếp nên $\widehat{ABP} = 180^\circ - \widehat{AFP}$ Lại có tứ giác AMEF nội tiếp nên $\widehat{AME} = 180^\circ - \widehat{AFB}$ $\Rightarrow \widehat{AFP} = \widehat{AFE} \Rightarrow E, F, P \text{ thẳng hàng}$	
	c) Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle OCD$ vuông tại C ta có $OM.OB = OC^2 = OF^2 \Rightarrow \frac{OF}{OM} = \frac{OD}{OF} \Rightarrow \triangle OMF \sim \triangle OFD \text{ (c.g.c)}$ $\Rightarrow \widehat{OFD} = \widehat{OMF} = 90^\circ - \widehat{CMF} = 90^\circ - \widehat{FAE} = 90^\circ - \widehat{AFO}$ $\Rightarrow \widehat{AFD} = 90^\circ \Rightarrow AF \perp FD \text{ mà } AF \perp FK$ $\Rightarrow DF = DK \Rightarrow D, F, K \text{ thẳng hàng}$ Gọi Z, X là giao FN với BC, DM. Gọi T là giao KZ với MF. Ta có $DC^2 = DK.DF = DM.DO \Rightarrow$ Tứ giác OMKF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KMF} = \widehat{KOF} = 2\widehat{OAF} = 2\widehat{FMS}$ $\Rightarrow \widehat{KME} = \widehat{FME} = \widehat{FAO} = \widehat{KNF} \Rightarrow \text{Tứ giác MNKZ nội tiếp}$ $\Rightarrow \widehat{KZM} = 180^\circ - \widehat{MNK} = 90^\circ \Rightarrow KZ \parallel DM$ Lại có $\triangle TMK$ có MZ là đường cao đồng thời là phân giác $\Rightarrow ZT = ZK$ Do $TK \parallel DM \Rightarrow \frac{ZT}{MX} = \frac{FZ}{FX} = \frac{ZK}{DX}$	

	$\Rightarrow XD = XM \Rightarrow X$ là trung điểm của đoạn DM. Vậy FN đi qua trung điểm của đoạn DM	
VI	Gọi $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ lần lượt là số kẹo trong 11 gói. Đặt $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{11}$ Giả sử tồn tại $a \leq k, l \leq 11$ mà $a_k \neq a_l$ Theo bài ra, ta suy ra được $S - a_1, S - a_2, \dots, S - a_{11}$ đều là số chẵn $\Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_{11}$ cũng chẵn hoặc cũng lẻ Ta thực hiện quá trình như sau: - Nếu $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ cũng chẵn, ta thu được bộ số mới $(b_1, b_2, \dots, b_{11}) = \left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_{11}}{2} \right)$ - Nếu $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ cũng lẻ, ta thu được bộ số mới $(b_1, b_2, \dots, b_{11}) = \left(\frac{a_1 - 1}{2}, \frac{a_2 - 1}{2}, \dots, \frac{a_{11} - 1}{2} \right)$ Ta thấy 11 gói kẹo với số kẹo $b_1; b_2; \dots; b_{11}$ cũng thỏa mãn điều kiện đề bài. Tiếp tục quá trình như vậy đến khi thu được bộ $(x_1; x_2; \dots; x_{11})$ mà tồn tại $1 \leq j; i \leq 11$ sao cho $x_j = 0; x_i = 1$ Mà bộ $(z_1; z_2; \dots; z_{11})$ thỏa mãn điều kiện đề bài nên $x_1; x_2; \dots; x_{11}$ cùng tính chẵn lẻ (Mâu thuẫn) Điều giả sử là sai. Vậy $a_1 = a_2 = \dots = a_{11}$	1,0đ