

SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO
LAI CHÂUKỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC: 2024-2025

Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x + 4\sqrt{x} + 4}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{x + \sqrt{x}}{1 - x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \right) \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức A .b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A \geq \frac{1 + \sqrt{2024}}{\sqrt{2024}}$.**Câu 2 (4,0 điểm)**a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 3y^2 + 2xy - 2x - 4y - 3 = 0$.b) Giải phương trình sau: $\sqrt{5x^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 3x - 18} + 5\sqrt{x}$.**Câu 3 (5,0 điểm)**a) Cho phương trình: $x^2 - (m - 2)x - 3 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $\sqrt{x_1^2 + 2024} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2024} + x_2$.b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - x - 3y = -16 \\ y^3 + 16 = 3xy^2 \end{cases}$$
Câu 4 (5,0 điểm)

Cho đường tròn O, R và một điểm A cố định nằm ngoài đường tròn, $OA = 2R$. Từ A kẻ tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn O (B, C là tiếp điểm). Đường thẳng OA cắt dây BC tại I . Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ BC . Tiếp tuyến tại M của đường tròn O cắt AB, AC lần lượt ở E, F . Dây BC cắt OE, OF lần lượt tại các điểm P, Q .

a) Chứng minh $\angle ABI = 60^\circ$ và tứ giác $OBEQ$ nội tiếp;b) Chứng minh $EF = 2PQ$;c) Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC sao cho tam giác OPQ có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất theo R .**Câu 5 (2,0. điểm)** Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{ab + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca + a^2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Hết

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4,0 điểm)

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} \right] : \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right] : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

b)

$$A \geq \frac{1+\sqrt{2024}}{\sqrt{2024}} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2024}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2024}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{2024} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2024$$

Vì $x > 0; x \neq 1$ và x nguyên nên $x \in \{2; 3; 4; \dots; 2024\}$ vậy có 2023 giá trị x nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 2. (4,0 điểm)

$$\text{a) } x^2 + 3y^2 + 2xy - 2x - 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(y-1)x + (3y^2 - 4y - 3) = 0$$

$$\Delta' = (y-1)^2 - (3y^2 - 4y - 3) = -2y^2 + 2y + 4$$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 2$$

Với $y = -1$, được: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Với $y = 0$, được: $x^2 - 2x - 3 = 0$ nên $x \in \{-1; 3\}$

Với $y = 1$, được: $x^2 = 4$ nên $x \in \{2; -2\}$

Với $y = 2$, được: $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $(2; -1), (-1; 0), (3; 0), (2; 1),$

$(-2; 1), (-1; 2)$

b) Điều kiện:
$$\begin{cases} x^2 - 3x - 18 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 5x^2 + 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 6.$$

$$\sqrt{5x^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 3x - 18} + 5\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9x + 9 - 5\sqrt{x(x^2 - 3x - 18)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 9 - 5\sqrt{(x^2 - 6x)(x + 3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 6x) + 3(x + 3) - 5\sqrt{(x^2 - 6x)(x + 3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 6x} - \sqrt{x + 3})(3\sqrt{x + 3} - 2\sqrt{x^2 - 6x}) = 0$$

Trường hợp 1: $\sqrt{x^2 - 6x} = \sqrt{x + 3} \Leftrightarrow x^2 - 7x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{7 - \sqrt{61}}{2} \end{cases}$

Suy ra $x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2}$ thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2: $3\sqrt{x + 3} = 2\sqrt{x^2 - 6x} \Leftrightarrow 4x^2 - 33x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x = 9$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{7 + \sqrt{61}}{2}; 9 \right\}$

Câu 3. (5,0 điểm)

Ta có: $\Delta = (m - 2)^2 + 12 > 0 \Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Theo hệ thức Vi – et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 2 \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\sqrt{x_1^2 + 2024} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2024} + x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 2024} - \sqrt{x_2^2 + 2024} = x_1 + x_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 2024} + \sqrt{x_2^2 + 2024}} = x_1 + x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + 2024} + \sqrt{x_1^2 + 2024} = x_1 - x_2 & (2) \end{cases}$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Giải (2). Do $\sqrt{x_1^2 + 2024} > |x_1|; \sqrt{x_2^2 + 2024} > |x_2|$

Suy ra $\sqrt{x_1^2 + 2024} + \sqrt{x_2^2 + 2024} > |x_1| + |x_2| \geq x_1 - x_2$

Vậy $m = 2$.

$$\begin{cases} x^2 - x - 3y = -16 & (1) \\ y^3 + 16 = 3xy^2 & (2) \end{cases}$$

$$y^3 + 16 = 3xy^2 \quad (2)$$

Thay $16 = 3xy^2 - y^3$ vào phương trình (1) ta có

$$\begin{aligned}x^2(x-3y) &= -(3xy^2 - y^3) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 0 \\&\Leftrightarrow (x-y)^3 = 0 \Leftrightarrow x = y\end{aligned}$$

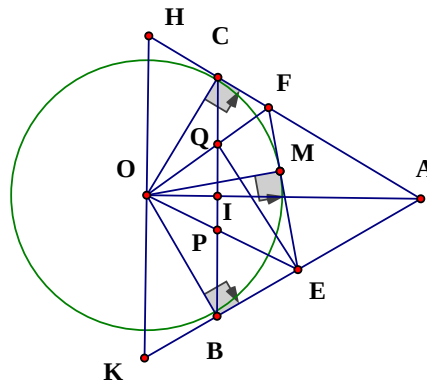
Với $x = y$ thay vào phương trình (2) ta có: $y^3 + 16 = 3y^3 \Leftrightarrow 2y^3 = 16 \Leftrightarrow y = 2$

$$y = 2 \Rightarrow x = 2$$

Vậy hệ phương trình có các cặp nghiệm:

$$(x; y) = (2; 2)$$

Câu 4. (5,0 điểm)



Vì $AC = AB, OC = OB$ nên AO là trung trực của $BC \Rightarrow OA \perp BC$ tại $I \Rightarrow ABI = BOI$ (cùng phụ BAO).

$$\Rightarrow \cos ABI = \cos BOI = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow ABI = BOI = 60^\circ \quad (1)$$

Mà OF, OE lần lượt là tia phân giác của COM, MOB

$$\Rightarrow FOM = \frac{COM}{2}, MOE = \frac{MOB}{2}$$

$$\Rightarrow FOE = FOM + MOE = \frac{COM + MOB}{2} = \frac{BOC}{2} = BOI \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $ABI = FOE = 60^\circ \Rightarrow QBE = QOE = 60^\circ$

Do đó tứ giác $OBEQ$ nội tiếp

Ta có $OQB = OEB$ (Cùng chắn OB của đường tròn $(OBEQ)$)

$$\Rightarrow OEF = OEB \Rightarrow OQB = OEF \text{ hay } OQP = OEF$$

Suy ra $\Delta OQP \sim \Delta OEF$ ($g.g$) (Do $OQP = OEF$ và QOP chung)

$$\Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{OQ}{OE} \quad (3)$$

Tứ giác $OBEQ$ nội tiếp và $OBE = 90^\circ, QBE = 60^\circ$ nên

$$OQE = 180^\circ - OBE = 90^\circ, OEQ = OBQ = OBE - QBE = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta OQE \text{ vuông tại } Q \text{ và } OEQ = 30^\circ \Rightarrow \frac{OQ}{OE} = \sin OEQ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = 2PQ$$

Vì $\Delta OQP \sim \Delta OEF$ ($g.g$) theo tỉ số đồng dạng $\frac{EF}{PQ} = 2$ nên

$$\frac{S_{OPQ}}{S_{OEF}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{OPQ} = \frac{S_{OEF}}{4} = \frac{OM \cdot EF}{8} = \frac{R \cdot EF}{8} \quad (5)$$

Qua O kẻ một đường thẳng vuông góc OA cắt AC, AB theo thứ tự tại H, K . Ta có:

$$BKO = BOI = 60^\circ \text{ (cùng phụ } BAO)$$

$$HC = KB = OB \cdot \cot BKO = OB \cdot \cot 60^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} EF &= FM + EM = FC + EB = (HF - HC) + (KE - KB) \\ &= (HF + KE) - (HC + KB) = (HF + KE) - 2HC \geq 2\sqrt{HF \cdot KE} - \frac{2R}{\sqrt{3}} \quad (6) \end{aligned}$$

Mặt khác $FHO = AOC = 60^\circ; EKO = AOB = 60^\circ$ nên dễ chứng minh được $\Delta HFO \sim \Delta KOE$ (cùng đồng dạng ΔOFE).

$$\frac{HF}{OK} = \frac{HO}{KE} \Leftrightarrow HF \cdot KE = OK \cdot OH = OK^2 = \left(\frac{R}{\sin 60^\circ} \right)^2 = \left(\frac{2R}{\sqrt{3}} \right)^2 \quad (7)$$

$$\text{Từ (5), (6), (7) } S_{OPQ} = \frac{R \cdot EF}{8} \geq \frac{R \cdot \left(\frac{4R}{\sqrt{3}} - \frac{2R}{\sqrt{3}} \right)}{8} = \frac{R^2}{4\sqrt{3}}$$

Dấu “=” xảy ra khi $KE = FH = OH = OK \Leftrightarrow FM = EM \Leftrightarrow MC = MB$

$\Leftrightarrow M$ chính giữa BC . Vậy ΔOPQ có diện tích nhỏ nhất thì M chính giữa cung nhỏ BC và giá trị nhỏ nhất là $\frac{R^2}{4\sqrt{3}}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Bất đẳng thức đã cho được viết lại $\frac{a}{\sqrt{2b(a+b)}} + \frac{b}{\sqrt{2c(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{2a(a+c)}} \geq \frac{3}{2}$

Áp dụng AM – GM, ta có $\sqrt{2b(a+b)} \leq \frac{2b+(a+b)}{2} = \frac{a+3b}{2} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2b(a+b)}} \geq \frac{2a}{a+3b}$

Tương tự, ta có $\frac{b}{\sqrt{2c(b+c)}} \geq \frac{2b}{b+3c}; \frac{c}{\sqrt{2a(a+c)}} \geq \frac{2c}{a+3c}$

Suy ra $\frac{a}{\sqrt{2b(a+b)}} + \frac{b}{\sqrt{2c(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{2a(a+c)}} \geq \frac{2a}{a+3b} + \frac{2b}{b+3c} + \frac{2c}{c+3a}$

Xét $P = \frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} = \frac{a^2}{a^2+3ab} + \frac{b^2}{b^2+3bc} + \frac{c^2}{c^2+3ca}$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+\frac{1}{3}(ab+bc+ca)+\frac{8}{3}(ab+bc+ca)}$$

Lại có $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{1}{3}(ab+bc+ca)$

Suy ra $P \geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)+\frac{8}{3}(ab+bc+ca)} \Leftrightarrow P \geq \frac{3(a+b+c)^2}{4(a+b+c)^2} = \frac{3}{4}$.

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.

Vậy $\frac{a}{\sqrt{2b(a+b)}} + \frac{b}{\sqrt{2c(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{2a(a+c)}} \geq \frac{3}{2}$ (đpcm).

----- Hết -----