

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
TỈNH PHÚ THỌ 2024 – 2025
MÔN TOÁN (DÀNH CHO CHUYÊN TIN)

Câu 1:

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 4x + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 4x_2 = 3x_2^2 + 28$

b) Cho số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2025$. Tìm giá trị biểu thức

$$P = \frac{a^2 - bc}{a^2 + 2025} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2025} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2025}$$

Câu 2:

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$4x^2 + 5y^2 + 4xy - 4x - 2y - 8 = 0$$

b) Tìm tất cả các số thực a, b để đa thức $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b + 5$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + 3$.

Câu 3:

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + xy - 3y - 1 = 0 \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x-1} = 2x + 2y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

b) Trong một buổi tổ chức lễ tuyên dương cho các học sinh có thành tích học tập xuất sắc của một tỉnh, ngoại trừ bạn Bình, hai người bất kì đều bắt tay nhau. Bình chỉ bắt tay với những người mình quen. Biết rằng mỗi cặp (hai người) chỉ bắt tay không quá một lần và có tổng cộng tất cả 454 cái bắt tay. Hỏi bạn Bình có bao nhiêu người quen trong buổi lễ tuyên dương đó?

Câu 4: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với các điểm A, B, C cố định. Điểm M di động trên cung BC không chứa A (M khác B, C và AM không vuông góc với BC). Kẻ BE vuông góc với AM tại E . Gọi N là giao điểm của AM và BC , H và J theo thứ tự là trực tâm của các tam giác CMN và ABN . Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng BC , F là chân đường vuông góc kẻ từ C đến đường thẳng AM .

a) Chứng minh rằng $IF \parallel MB$

b) Chứng minh $\triangle ABJ \sim \triangle CMH$

c) Khi điểm M di động nhưng vẫn thỏa mãn yêu cầu bài toán, chứng minh rằng đường thẳng HE luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2y^2 + 4y + 4 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{xy}{3y+2}$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\text{thì } \Delta' = 7 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{7}{2}$$

$$\text{Theo hệ thức Viet ta được } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = 2m - 3 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } x_1 = 4 - x_2 \Rightarrow 4 - x_2^3 + 4x_2 - 3x_2^2 - 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - 1)(x_2^2 - 8x_2 + 36) = 0$$

$$\text{Vì } x^2 - 8x + 36 = (x - 4)^2 + 20 > 0 \Rightarrow x_2 = 1$$

Phương trình đã cho có 1 nghiệm bằng 1 nên

$$1 - 4 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$$

Đây cũng chính là giá trị duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có:

$$\frac{a^2 - bc}{a^2 + 2025} = \frac{a^2 + ab + ca - 2025}{a^2 + 2025} = \frac{a(a+b) + a(a+c)}{a^2 + 2025} - 1 = \frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b} - 1$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^2 - ca}{b^2 + 2025} = \frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} - 1$$

$$\frac{c^2 - ab}{c^2 + 2025} = \frac{c}{c+a} + \frac{c}{b+c} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } P &= \frac{a^2 - bc}{a^2 + 2025} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2025} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2025} \\ &= \frac{a^2 - bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 - ca}{(b+a)(b+c)} + \frac{c^2 - ab}{(c+b)(c+a)} \\ &= \frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b} - 1 + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} - 1 + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{b+c} - 1 \\ &= \left(\frac{a}{c+a} + \frac{c}{c+a} \right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) + \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \right) - 3 = 0 \end{aligned}$$

Vậy $P = 0$.

Câu 2:

a) Ta có: $(2x + y - 1)^2 + 4y^2 = 9$

$$\Rightarrow 9 \geq 4y^2 \Rightarrow y^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow y^2 \in \{1; 0\}$$

Với $y^2 = 1 \Rightarrow (2x + y - 1)^2 = 5$

$\Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm nguyên

$$\text{Với } y^2 = 0 \Rightarrow (2x - y + 1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = \pm 3 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 0 \\ x = -2; y = 0 \end{cases}$$

Thử lại thỏa mãn

Vậy $(x; y) \in \{(1; 0); (-2; 0)\}$

b) Vì $f(x)$ chia hết cho $g(x)$, $f(x)$ bậc 3, $g(x)$ bậc 2

$$\Rightarrow f(x) = (x + c)(x^2 + 3) \text{ với } c \text{ là số thực}$$

$$\text{Suy ra } f(x) = x^3 + cx^2 + 3x + 3c = x^3 + 2x^2 + ax + b + 5, \forall x$$

Đồng nhất hệ số ta có $c = 2, a = 3, b = 3c - 5 = 1$

Vậy $a = 3, b = 1$.

Câu 3:

a) Điều kiện: $x \geq 1, y \geq 0$

$$\text{Phương trình (1) trở thành } (x + 2y + 1)(x - y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 1 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

Với $x = -2y - 1$:

$$\text{Vì } -2y - 1 < 0, \forall y \geq 0 \Rightarrow x < 0 (\text{vô})$$

Với $x = y + 1$:

Thay $x = y + 1$ vào phương trình (2) ta được

$$(y + 1)\sqrt{y} + y\sqrt{y} = 2(y + 1) + 2y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}(2y + 1) = 2(2y + 1)$$

$$\text{Mặt khác } y \geq 0 \Rightarrow 2y + 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{y} = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 5$$

Thử lại thỏa mãn

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (5; 4)$.

b) Xét nhóm n học sinh gồm tất cả các học sinh ngoại trừ Bình ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

Vì hai người bất kì đều bắt tay nhau và bắt tay không quá 1 lần

$$\Rightarrow \text{Số cái bắt tay trong nhóm là } \frac{n(n-1)}{2}$$

Do số người quen của Bình không vượt quá n nên

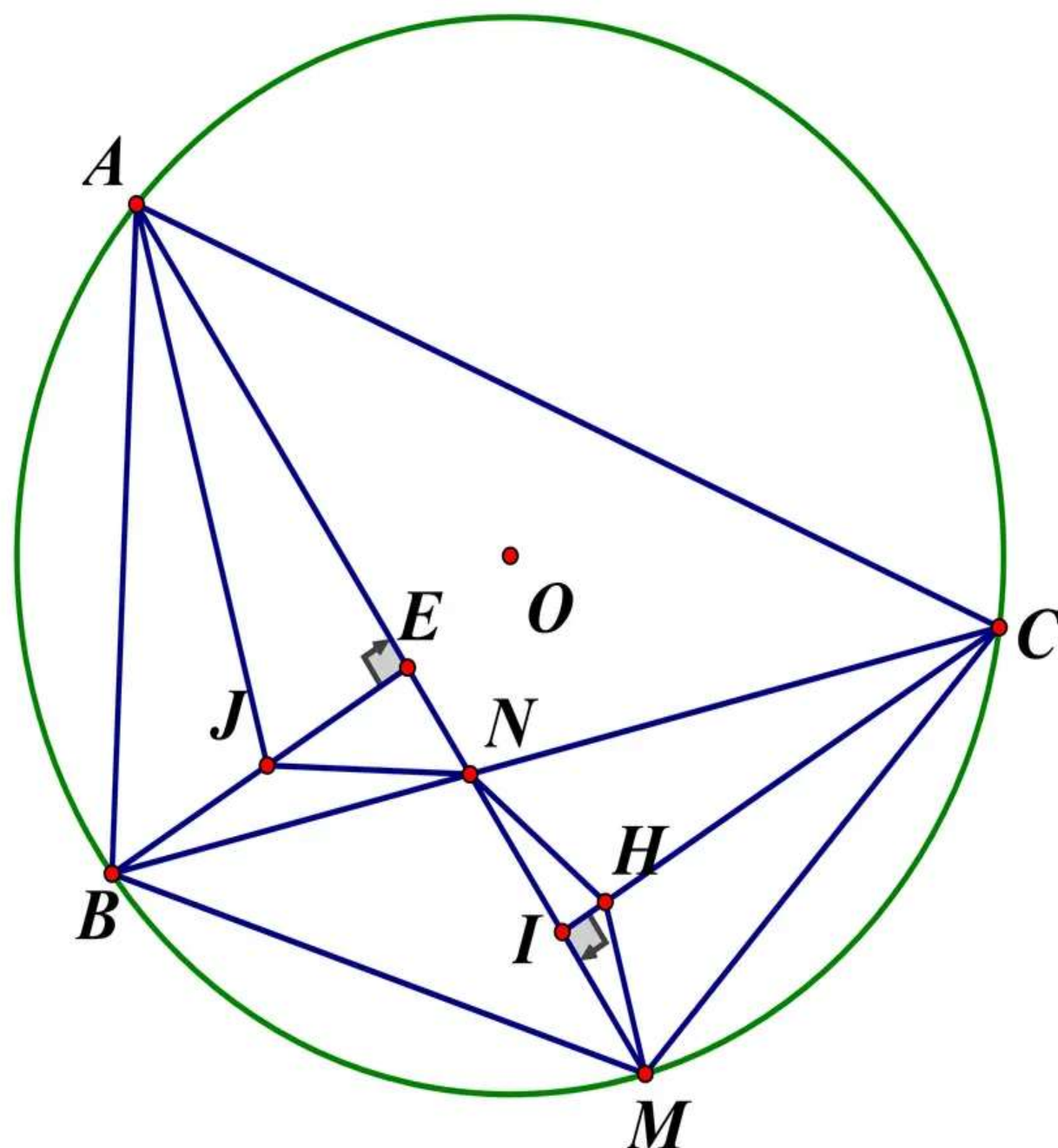
$$454 \leq \frac{n(n-1)}{2} + n \Rightarrow n \geq 30$$

$$\text{Lại có } \frac{n(n-1)}{2} \leq 454 \Rightarrow n \leq 30$$

Suy ra $n = 30$

$$\text{Do đó, số người quen của Bình là } 454 - \frac{30(30-1)}{2} = 19$$

Câu 4:



c) Gọi Q là giao của đường thẳng qua B vuông góc với AC

S là giao của AC và BQ

Gọi P là chân đường cao hạ từ M xuống BC, L là giao của MP và BE

Ta có: $BE \perp AM, CF \perp AM$

$$\Rightarrow BE \parallel CF$$

Ta cũng có: $\angle NEI = \angle ABC = \angle AMC$ nên $EI \parallel CM$

Từ đó ta có: $\frac{BS}{BQ} \cdot \frac{LM}{LH} = \frac{BC \cdot AI}{CI} \cdot \frac{NI}{NB \cdot AI} \cdot \frac{EM}{EF} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{NI}{NB} \cdot \frac{EM}{CI} = \frac{BN}{NE} \cdot \frac{NI}{NB} \cdot \frac{NE}{NI} = 1$

$$\Rightarrow \frac{BS}{BQ} = \frac{LH}{LM}$$

Gọi E' là giao của BL và HS

Có $\frac{BS}{HL} = \frac{BE'}{LE'}$

Mặt khác, $\frac{BS}{HL} = \frac{BQ}{LM} = \frac{BE}{LE} \Rightarrow E \equiv E'$

$$\Rightarrow H, E, S \text{ thẳng hàng}$$

Mà BC, AC cố định $\Rightarrow$ Giao điểm của đường thẳng qua B vuông góc với BC và AC cố định $\Rightarrow S$ cố định

Vậy HE đi qua S cố định.

Câu 5:

Vì $x^2y^2 + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow y + 1 = \frac{-x^2y^2}{4}$

Ta có: $T = \frac{xy}{3y+2} = \frac{4xy}{3(4y+4)-4} = \frac{4xy}{-3x^2y^2-4} = \frac{-4xy}{3x^2y^2+4}$

Đặt $m = xy \Rightarrow T = \frac{-4m}{3m^2+4} \Leftrightarrow 3Tm^2 + 4m + 4T = 0 \quad (1)$

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn m, T là tham số

Khi đó: $\Delta' = 2^2 - 3T \cdot 4T = 4(1 - 3T^2)$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 3T^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{3}}{3} \leq T \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Do đó:

$$T_{\min} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-2}{3T} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{-4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

$$T_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-2}{3T} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{-4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

Vậy $T_{\min} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{-4}{3} \right)$

$$T_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-4}{3} \right)$$