

ĐỀ BÀI

Câu 1 (2,0 điểm).

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} - \frac{7}{y} = 8 \end{cases}$$

2. Cho biểu thức $P = \frac{a-b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2 b^4}{a^2 - 2ab + b^2}}$ với $a \neq b, b \neq 0$.

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P khi $a = \frac{2}{3}$ và $b = \sqrt{3^{2020}}$.

Câu 2 (2,0 điểm). Cho phương trình: $x^2 - x + 2m - 7 = 0$.

a) Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm kép, tìm nghiệm đó.

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $2019x_1 + 2020x_2 = 2021$.

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{2}{5}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao giảm đi $2cm$ và cạnh đáy tăng thêm $2cm$ thì diện tích của nó giảm $14cm^2$. Tính diện tích tam giác đó.

b) Cho tam giác có số đo các đường cao là các số nguyên, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 1. Chứng minh tam giác đó là tam giác đều.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC , $\angle H = 45^\circ$. Các đường cao BD, CE của tam giác cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh: $HD = DC$.

c) Tính tỉ số: $\frac{DE}{BC}$.

Câu 5 (1,0 điểm).

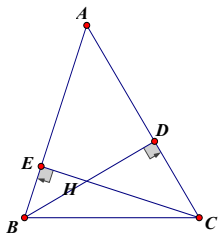
a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\sqrt{(x+2020)^2} + \sqrt{(x+2021)^2}$.

b) Tồn tại hay không 2020 điểm trên một mặt phẳng mà bất kỳ 3 điểm nào trong chúng đều tạo thành tam giác có góc tù.

..... **Hết**

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM
MÔN TOÁN CHUYÊN

Câu	Hướng dẫn	Điểm
1.1	Điều kiện $x \neq 0; y \neq 0$ Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4u + v = 1 \\ 2u - 7v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$	1,0
1.2	a) Với $a \neq b, b \neq 0 \Rightarrow P = \frac{(a-b) a b^2}{b^2 a-b } = \frac{(a-b) a }{ a-b }$	0,5
	b) Với $0 < a = \frac{2}{3} < b = \sqrt{3^{2020}} \Rightarrow P = \frac{(a-b) a }{ a-b } = a = \frac{2}{3}$	0,5
2	a) Ta có: $\Delta = 29 - 8m$. Phương trình có nghiệm kép thì $m = \frac{29}{8}$ Nghiệm kép là $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$	1,0
	b) Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $m < \frac{29}{8}$ Ta có: $2019x_1 + 2020x_2 = 2021 \Leftrightarrow 2020(x_1 + x_2) - x_1 = 2021 \Leftrightarrow x_1 = -1$. Khi đó $m = \frac{5}{2}$ thỏa mãn.	1,0
3	a) Gọi cạnh đáy của tam giác là $x > 0(cm)$ thì chiều cao có chiều cao bằng $\frac{2x}{5}(cm)$ khi đó diện tích của tam giác là: $S = \frac{x^2}{5}cm^2$ Chiều cao giảm đi $2cm$ và cạnh đáy tăng thêm $3cm$ thì diện tích của tam giác đó bằng: $\frac{(x+3)(x-5)}{5}cm^2$ Theo giả thiết ta có: $\frac{(x+3)(x-5)}{5} + 14 = \frac{x^2}{5} \Rightarrow x = \frac{55}{2} \Rightarrow S = \frac{605}{4}cm^2$.	1,0
	b) Gọi $x; y; z$ lần lượt là độ dài các đường cao tương ứng với các cạnh $a; b; c$ của tam giác. Nhận xét rằng: Độ dài đường cao của một tam giác luôn lớn hơn đường kính của đường tròn nội tiếp tam giác đó. Suy ra $x > 2; y > 2; z > 2 \Rightarrow x \geq 3; y \geq 3; z \geq 3$. (Đường cao là các số nguyên) $\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ (1)	1,0

	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{ax} + \frac{b}{by} + \frac{c}{cz} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{1}{r} = 1$ Mặt khác: (2) Từ (1) và (2) suy ra $x = y = z = 3 \Rightarrow a = b = c = 2\sqrt{3}$ hay tam giác đó đều.	
4	a) Ta có $\angle ADH = \angle AEH = 90^\circ \Rightarrow ADHE$ nội tiếp. 	1,0
	b) Vì $\angle H = 45^\circ \Rightarrow \angle ACH = \angle CHD = 45^\circ \Rightarrow DH = DC$	1,0
	c) Vì D, E nằm trên đường tròn đường kính BC nên $\angle AED = \angle ACB$ $\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AE\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1,0
5	a) Ta có $\sqrt{(x+2020)^2} + \sqrt{(x+2021)^2} = x+2020 + x+2021$ $= -x-2020 + x+2021 \geq -x-2020+x+2021 = 1$ $-x-2020 = x+2021 \Leftrightarrow x = -\frac{4041}{2}$ Đẳng thức xảy ra khi	0,5
	b) Lấy 2 điểm A, B bất kỳ trên mặt phẳng, dựng đường tròn đường kính AB Trên nửa đường tròn đó lấy 2020 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2020}$ khác nhau và khác B Khi đó trong 2020 điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng, nên với bất kỳ 3 điểm $A_i, A_j, A_k (i \neq j \neq k)$ đều tạo thành một tam giác. Tam giác $A_i A_j A_k$ chắc chắn có 1 góc tù (vì góc nội tiếp chắn cung lớn hơn nửa đường tròn). Vậy tồn tại 2020 điểm trên mặt phẳng thỏa mãn bài toán.	0,5

(Lưu ý: Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa)