

Câu 1. Cho phương trình $x^4 - (m+2)x^2 + 3m - 3 = 0$ với m là tham số. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2x_1x_2x_3x_4$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2.

1) Giải phương trình $2022\sqrt{2022x-2021} + \sqrt{2023x-2022} = 2023$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 6xy - y^3 = 8 \\ \sqrt{2x+y+3} + \sqrt{5x-y+3} = -x^2 - y + 5 \end{cases}$$

Câu 3.

1) Tìm tất cả các số tự nhiên n và k để $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^4 - x^2 + 2x^2y - 2xy + 2y^2 - 2y - 36 = 0$

Câu 4. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{b(a^2+1)^2}{a^2(b^2+1)} + \frac{c(b^2+1)^2}{b^2(c^2+1)} + \frac{a(c^2+1)^2}{c^2(a^2+1)}.$$

Câu 5. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Lấy điểm C tùy ý trên nửa đường tròn đó (C khác A và B). Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của cung AC và cung BC . Hai đường thẳng AC và BN cắt nhau tại D . Hai dây cung AN và BC cắt nhau tại H .

1) Chứng minh tứ giác $CDNH$ nội tiếp.

2) Gọi I là trung điểm DH . Chứng minh IN là tiếp tuyến của nửa đường tròn $(O; R)$.

3) Chứng minh rằng khi C di động trên nửa đường tròn $(O; R)$ thì đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

4) Trên nửa đường tròn $(O; R)$ không chứa C lấy một điểm P tùy ý (P khác A và B). Gọi Q, R, S lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên AB, BC, CA . Tìm vị trí của P để tổng $\frac{AB}{PQ} + \frac{BC}{PR} + \frac{CA}{PS}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho phương trình $x^4 - (m+2)x^2 + 3m - 3 = 0$ với m là tham số. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2x_1x_2x_3x_4$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đặt $x^2 = t, t \geq 0$. Phương trình trở thành: $t^2 - (m+2)t + 3m - 3 = 0$ (1)

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $0 < t_1 < t_2$.

$$\text{Ta được } \begin{cases} \Delta = (m+2)^2 - 4(3m-3) > 0 \\ S = m+2 > 0 \\ P = 3m-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 16 > 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 4 \end{cases}$$

Giả sử $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

Khi đó, đặt $x_1^2 = x_4^2 = t_2; x_2^2 + x_3^2 = t_1; t_1 > 0; t_2 > 0$.

Ta có

$$P = 2t_1^2 + 2t_2^2 - 2t_1t_2 = 2S^2 - 6P = 2(m+2)^2 - 6(3m-3) = 2m^2 - 10m + 26 = 2\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{27}{2} \geq \frac{27}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{27}{2}$, đạt khi $m = \frac{5}{2}$.

Câu 2.

1) Giải phương trình $2022\sqrt{2022x-2021} + \sqrt{2023x-2022} = 2023$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 6xy - y^3 = 8 \\ \sqrt{2x+y+3} + \sqrt{5x-y+3} = -x^2 - y + 5 \end{cases}$

Lời giải

$$\text{1) Điều kiện: } \begin{cases} x \geq \frac{2021}{2022} \\ x \geq \frac{2022}{2023} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2022}{2023}$$

$$2022\sqrt{2022x-2021} + \sqrt{2023x-2022} = 2023$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2022(\sqrt{2022x-2021}-1)+\sqrt{2023x-2022}-1=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2022(2022x-2022)}{\sqrt{2022x-2021}+1}+\frac{2023x-2023}{\sqrt{2023x-2022}+1}=0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{2022^2}{\sqrt{2022x-2021}+1}+\frac{2023}{\sqrt{2023x-2022}+1}\right]=0 \\
&\Leftrightarrow x=1
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

$$2) x^3 - 6xy - y^3 = 8$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x-y)^3 + 3xy(x-y) - 6xy - 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-y-2)\left[(x-y)^2 + 2(x-y) + 4\right] + 3xy(x-y-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-y-2)(x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 4 + 3xy) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-y-2)(x^2 + y^2 - xy + 2x - 2y + 4) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-2=0 \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 + (x-y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x=-2 \\ y=2 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow y=x-2
\end{aligned}$$

Thay vào phương trình $\sqrt{2x+y+3} + \sqrt{5x-y+3} = -x^2 - y + 5$, ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x+1} + \sqrt{4x+5} = -x^2 - x + 7 \quad DK : x \geq -\frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-2) + (\sqrt{4x+5}-3) + (x^2+x-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x+5}+3} + x+2\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow x=1
\end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; -1)$.

Câu 3.

1) Tìm tất cả các số tự nhiên n và k để $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^4 - x^2 + 2x^2y - 2xy + 2y^2 - 2y - 36 = 0$

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= n^4 + 4^{2k+1} = (n^2)^2 + (2^{2k+1})^2 = (n^2 + 2^{2k+1})^2 - 2n^2 \cdot 2^{2k+1} \\
&= (n^2 + 2^{2k+1})^2 - (n \cdot 2^{k+1})^2 = (n^2 + 2^{2k+1} - n \cdot 2^{k+1})(n^2 + 2^{2k+1} + n \cdot 2^{k+1})
\end{aligned}$$

$$A \text{ là số nguyên tố} \Rightarrow n^2 + 2^{2k+1} - n \cdot 2^{k+1} = 1 \Leftrightarrow n^2 - 2 \cdot n \cdot 2^{k+1} + 2^{2(k+1)} + n^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (n - 2^{k+1})^2 + n^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n - 2^{k+1} = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ k = 0 \end{cases}$$

Thử lại $A = 1 + 4 = 5$, thỏa mãn yêu cầu.

$$2) x^4 - x^2 + 2x^2y - 2xy + 2y^2 - 2y - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + y^2 + 1 - 2x^2 - 2y + 2x^2y) + (x^2 - 2xy + y^2) = 36 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y - 1)^2 + (x - y)^2 = 37 \quad (1)$$

$$\text{Nhận xét: } \begin{cases} x^2 + y - 1 > x - y \\ x^2 + y - 1 > 0 \end{cases} \quad (\forall x \in \mathbb{N}^*; y \in \mathbb{N}^*).$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + y - 1 = 6 \\ x - y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y - 1 = 6 \\ x - y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y - 1 = 1 \\ x - y = -6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + x - 4 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x + 4 = 0 \\ y = x + 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $(x; y) = (2; 3)$

Câu 4. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{b(a^2 + 1)^2}{a^2(b^2 + 1)} + \frac{c(b^2 + 1)^2}{b^2(c^2 + 1)} + \frac{a(c^2 + 1)^2}{c^2(a^2 + 1)}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } 2 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow abc \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$P \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)}{abc}}$$

$$a + \frac{1}{a} = 4 \cdot \frac{a}{4} + 9 \cdot \frac{1}{9a} \geq 13\sqrt[13]{\frac{1}{4^4 \cdot 9^9 a^5}}$$

$$b + \frac{1}{b} = 4 \cdot \frac{b}{4} + 9 \cdot \frac{1}{9b} \geq 13\sqrt[13]{\frac{1}{4^4 \cdot 9^9 b^5}}$$

$$c + \frac{1}{c} = 4 \cdot \frac{c}{4} + 9 \cdot \frac{1}{9c} \geq 13\sqrt[13]{\frac{1}{4^4 \cdot 9^9 c^5}}$$

$$P \geq 3\sqrt[3]{13^3 \cdot \sqrt[13]{\frac{1}{4^{12} \cdot 9^{27} \cdot a^5 \cdot b^5 \cdot c^5}}} \geq 39\sqrt[3]{\sqrt[13]{\frac{1}{2^{24} \cdot 3^{54} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{15}}}} = \frac{13}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{2}{3}$

Câu 5. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Lấy điểm C tùy ý trên nửa đường tròn đó (C khác A và B). Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của cung AC và cung BC . Hai đường thẳng AC và BN cắt nhau tại D . Hai dây cung AN và BC cắt nhau tại H .

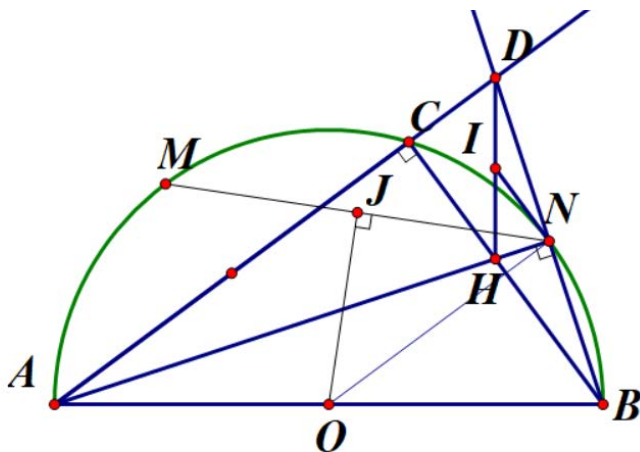
1) Chứng minh tứ giác $CDNH$ nội tiếp.

2) Gọi I là trung điểm DH . Chứng minh IN là tiếp tuyến của nửa đường tròn $(O; R)$.

3) Chứng minh rằng khi C di động trên nửa đường tròn $(O; R)$ thì đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

4) Trên nửa đường tròn $(O; R)$ không chứa C lấy một điểm P tùy ý (P khác A và B). Gọi Q, R, S lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên AB, BC, CA . Tìm vị trí của P để tổng $\frac{AB}{PQ} + \frac{BC}{PR} + \frac{CA}{PS}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



1) Có $AC \perp CH \Rightarrow \widehat{DCH} = 90^\circ$; $AN \perp NB \Rightarrow \widehat{HND} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DCH} + \widehat{DHN} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $CDNH$ là tứ giác nội tiếp.

2) Tam giác DNH vuông tại N có NI là trung tuyến ứng với cạnh huyền. Ta được $\widehat{INH} = \widehat{IHN}$.

Tứ giác $CDNH$ nội tiếp nên $\widehat{IHN} = \widehat{NCD}$

Tứ giác $ACNB$ nội tiếp nên $\widehat{NCD} = \widehat{NBA}$

Tam giác ONB cân tại O nên $\widehat{NBA} = \widehat{ONB} \Rightarrow \widehat{NBA} + \widehat{ONA} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{INO} = 90^\circ$. Vậy IN là tiếp tuyến của nửa đường tròn $(O; R)$.

3) Ta có OM là tia phân giác góc $\widehat{AOC}$, ON là tia phân giác góc $\widehat{NOB}$. Hai góc này kề bù, suy ra $ON \perp OM$.

Tam giác OMN vuông cân tại O . Gọi J là trung điểm MN , ta có $MN \perp OJ$;

$$OJ = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + R^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra MN luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O , bán kính $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

4)

$$P = \frac{AB^2}{PQ \cdot AB} + \frac{BC^2}{PR \cdot BC} + \frac{CA^2}{PS \cdot CA}$$

Có $PQ \cdot AB = PA \cdot PB$

$$PR \cdot BC = PB \cdot PC \cdot \sin \widehat{BPC} = PB \cdot PC \cdot \sin \widehat{BAC} = PB \cdot PC \cdot \frac{BC}{AB}$$

$$PS \cdot CA = PA \cdot PC \cdot \sin \widehat{APC} = PA \cdot PC \cdot \sin \widehat{APC} = PA \cdot PC \cdot \sin \widehat{ABC} = PA \cdot PC \cdot \frac{AC}{AB}$$

$$\text{Ta được } P = \frac{AB^2}{PA \cdot PB} + \frac{AB \cdot AC}{PC \cdot PB} + \frac{AB \cdot BC}{PC \cdot PA} = \frac{AB^2}{PA \cdot PB} + \frac{AB \cdot AC \cdot PA + AB \cdot BC \cdot PB}{PA \cdot PB \cdot PC}$$

$$= \frac{AB^2}{PA \cdot PB} + \frac{AB(AC \cdot PA + BC \cdot PB)}{PA \cdot PB \cdot PC} = \frac{AB^2}{PA \cdot PB} + \frac{AB \cdot AB \cdot PC}{PA \cdot PB \cdot PC} \quad (d / l \text{ Ptolemy})$$

$$= 2 \frac{AB^2}{PA \cdot PB} \geq \frac{4AB^2}{PA^2 + PB^2} = 4$$

Dấu bằng xảy ra khi P là điểm chính giữa cung AB không chứa C .