

**Câu 1 (2,0 điểm).**

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 + (2m-1)x - m^2 - 2 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1| + |x_2| = 7$ .

b) Cho  $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$  với  $n$  nguyên dương. Tính  $f(1) + f(2) + \dots + f(60)$ .

**Câu 2 (2,0 điểm).**

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$  thì  $n^3 - 9n + 54$  không chia hết cho 81.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  sao cho  $P = \sqrt{n+6} + \sqrt{n+3\sqrt{n+6}}$  là số nguyên.

**Câu 3 (2,0 điểm).**

a) Giải phương trình  $12x^2 - 2x - 1 = x\sqrt{2x+1}$ .

b) Trên một đường tròn, lấy 2024 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xen kẽ nhau. Mỗi điểm được gán với một giá trị là một số thực khác không, giá trị của mỗi điểm màu xanh bằng tổng giá trị của hai điểm màu đỏ kề với nó, giá trị của mỗi điểm màu đỏ bằng tích giá trị của hai điểm màu xanh kề với nó. Tính tổng giá trị của 2024 điểm trên.

**Câu 4 (3,0 điểm).** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R = 4\text{ cm}$ ,  $BC = 4\sqrt{3}\text{ cm}$ . Đường tròn đường kính  $BC$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $E, F$  ( $E$  khác  $B$  và  $F$  khác  $C$ ). Gọi  $H$  là giao điểm của  $BF$  và  $CE$ .

a) Chứng minh rằng tứ giác  $AEHF$  nội tiếp đường tròn và tính bán kính của đường tròn đó.

b) Chứng minh rằng  $OA \perp EF$ .

c) Từ  $A$  kẻ các tiếp tuyến  $AI, AJ$  tới đường tròn đường kính  $BC$  ( $I, J$  là các tiếp điểm). Đường thẳng  $AH$  cắt đường tròn  $(O, R)$  tại  $K$  ( $K$  khác  $A$ ). Tính  $\frac{HI \cdot HJ}{HK}$ .

**Câu 5 (1,0 điểm).** Cho các số thực dương  $x, y, z$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{2xyz}{x^3 + y^3 + z^3} + \frac{|x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| + |z^3 - x^3|}{3xyz}.$$

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

I. Một số chú ý khi chấm bài

- Đáp án chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án – thang điểm

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 + (2m - 1)x - m^2 - 2 = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1| + |x_2| = 7$ .

| Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Điểm |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $\Delta = (2m - 1)^2 - 4(-m^2 - 2) = 8m^2 - 4m + 9 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$<br><br>Vậy với $\forall m \in \mathbb{R}$ thì phương trình $x^2 + (2m - 1)x - m^2 - 2 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$<br><br>Theo viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m + 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -m^2 - 2 \end{cases}.$ | 0,25 |
| $ x_1  +  x_2  = 7 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2 x_1 \cdot x_2  = 49 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 49$<br>(do $x_1 \cdot x_2 = -m^2 - 2 < 0 \Rightarrow  x_1 \cdot x_2  = -x_1 \cdot x_2$ )                                                                                                               | 0,25 |
| $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 49 \Leftrightarrow (-2m + 1)^2 + 4m^2 + 8 = 49$                                                                                                                                                                                                                                | 0,25 |
| $\Leftrightarrow 8m^2 - 4m - 40 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{2} \\ m = -2 \end{cases}.$<br><br>Vậy với $m = \frac{5}{2}$ và $m = -2$ thì phương trình $x^2 + (2m - 1)x - m^2 - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $ x_1  +  x_2  = 7$ .                | 0,25 |

b) Cho  $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n - 1}}$  với  $n$  nguyên dương. Tính  $f(1) + f(2) + \dots + f(60)$ .

| Đáp án                                                                                                                                                                                             | Điểm |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n - 1}} = \frac{(4n + \sqrt{4n^2 - 1})(\sqrt{2n + 1} - \sqrt{2n - 1})}{(\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n - 1})(\sqrt{2n + 1} - \sqrt{2n - 1})}$ | 0,25 |
| $= \frac{1}{2} \left( \sqrt{(2n + 1)^3} - \sqrt{(2n - 1)^3} \right)$                                                                                                                               | 0,25 |

|                                                                                                                                                          |             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Áp dụng vào bài toán ta có:                                                                                                                              |             |
| $f(1) + f(2) + \dots + f(60) = \frac{1}{2} \left[ (\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}) + (\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}) + \dots + (\sqrt{121^3} - \sqrt{119^3}) \right]$ | <b>0,25</b> |
| $= \frac{1}{2} (\sqrt{121^3} - \sqrt{1^3}) = 665.$                                                                                                       | <b>0,25</b> |

**Câu 2 (2,0 điểm).**

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$  thì  $n^3 - 9n + 54$  không chia hết cho 81.

| <b>Đáp án</b>                                                                                                                                                      | <b>Điểm</b> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Giả sử tồn tại số tự nhiên $n$ để $n^3 - 9n + 54$ chia hết cho 81<br>$\Rightarrow n^3 - 9n + 54 : 3 \Rightarrow n : 3$                                             | <b>0,25</b> |
| Đặt $n = 3k, k \in \mathbb{N}$ . Khi đó: $n^3 - 9n + 54 = 27k^3 - 27k + 54 = 27(k^3 - k + 2)$ .                                                                    | <b>0,25</b> |
| Mà $n^3 - 9n + 54 : 81$ nên $k^3 - k + 2 : 3$                                                                                                                      | <b>0,25</b> |
| Nhưng $k^3 - k + 2 = (k-1)k(k+1) + 2$ không chia hết cho 3, $\forall k \in \mathbb{N}$ .<br>Vậy với mọi số tự nhiên $n$ thì $n^3 - 9n + 54$ không chia hết cho 81. | <b>0,25</b> |

b) Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  sao cho  $P = \sqrt{n+6} + \sqrt{n+3\sqrt{n+6}}$  là số nguyên.

| <b>Đáp án</b>                                                                                                                                                                                                      | <b>Điểm</b> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| $P = \sqrt{n+6} + \sqrt{n+3\sqrt{n+6}}, P \in \mathbb{Z}$ .<br>$\Rightarrow n + 3\sqrt{n+6} = (P - \sqrt{n+6})^2 = P^2 + n + 6 - 2P\sqrt{n+6}$<br>$\Rightarrow \sqrt{n+6} = \frac{P^2 + 6}{2P + 3} \in \mathbb{Q}$ | <b>0,25</b> |
| Do đó $\sqrt{n+6} \in \mathbb{Q}$<br>mà $n+6 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{n+6} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4\sqrt{n+6} \in \mathbb{Z}$ .                                                                        | <b>0,25</b> |
| $4\sqrt{n+6} = \frac{4P^2 + 24}{2P + 3} = 2P - 3 + \frac{33}{2P + 3}$ .                                                                                                                                            | <b>0,25</b> |
| $4\sqrt{n+6} \in \mathbb{Z}, P \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2P + 3$ là ước của 33 ( mà $P \geq \sqrt{6} + \sqrt{3\sqrt{6}}$ ), ta tìm được<br>$P = 15 \Rightarrow n = 43$ .<br>Vậy $n = 43$ .                        | <b>0,25</b> |

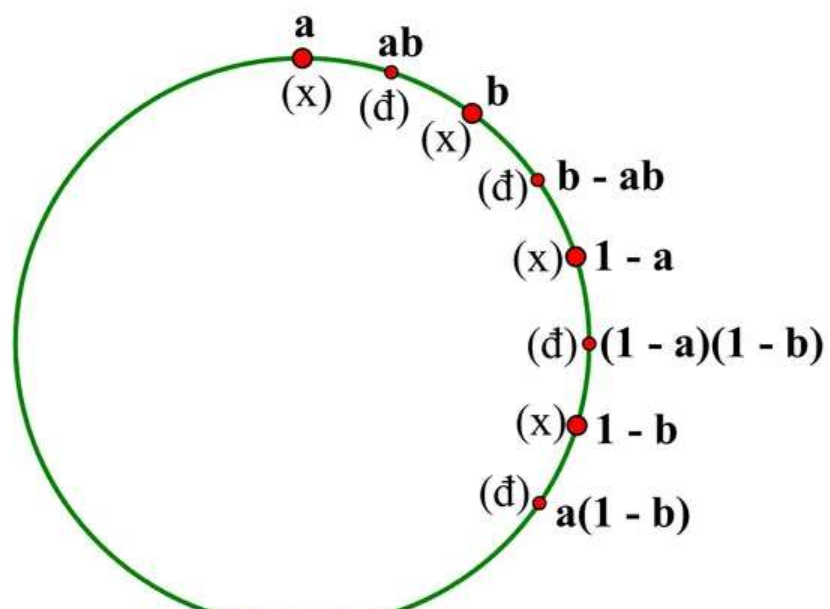
**Câu 3 (2,0 điểm).**

a) Giải phương trình:  $12x^2 - 2x - 1 = x\sqrt{2x+1}$ .

| <b>Nội dung</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>Điểm</b> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2} (*)$ .<br>+) $x = 0$ : Không là nghiệm của phương trình.                                                                                                                                                                                                          | <b>0,25</b> |
| +) $x \neq 0$ : Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2$ ta được:<br>$12x^2 - 2x - 1 = x\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 12 - \frac{2x+1}{x^2} = \frac{\sqrt{2x+1}}{x}$ .<br>Đặt $t = \frac{\sqrt{2x+1}}{x} \Rightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}$ . | <b>0,25</b> |

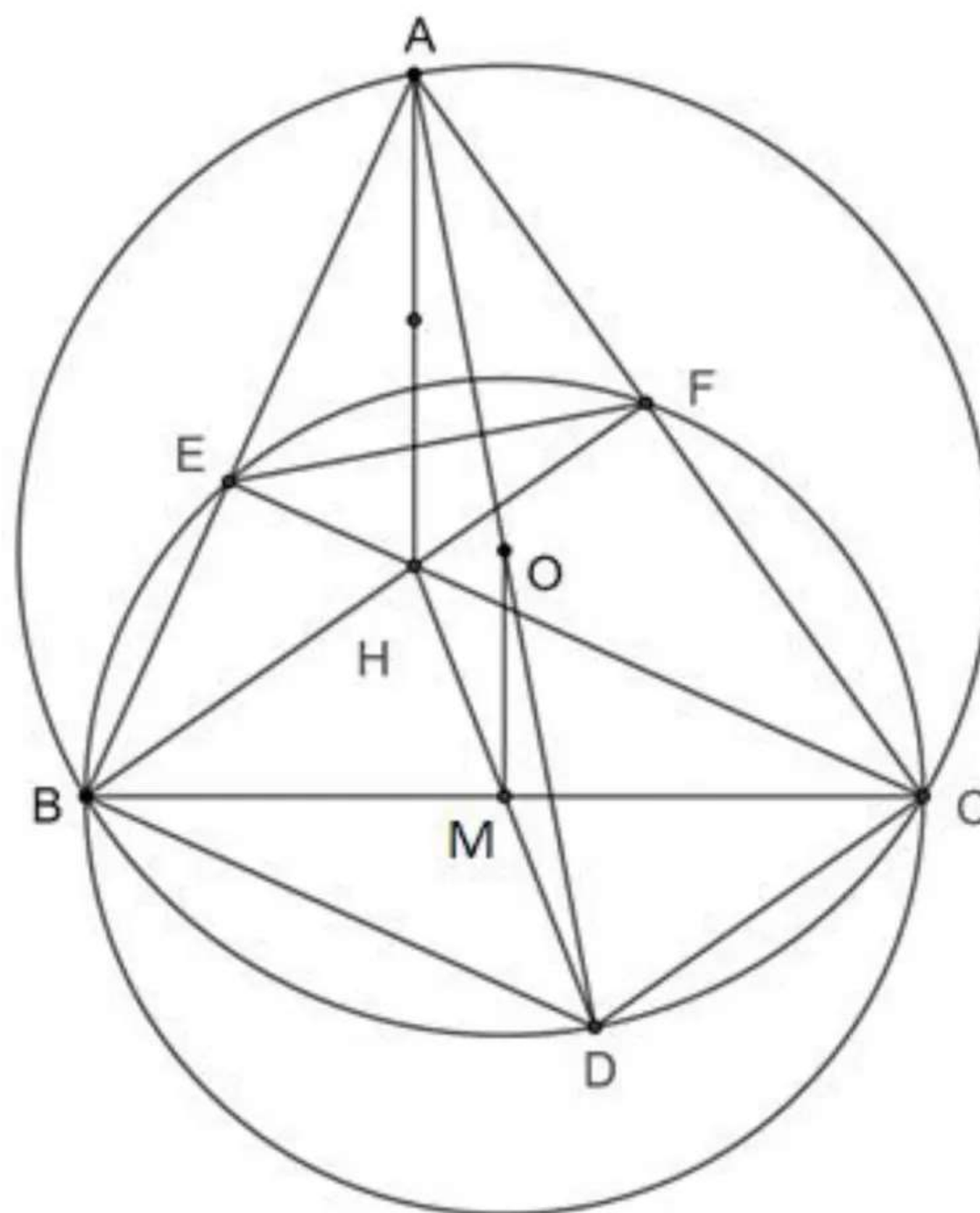
|                                                                                                                                                                                       |             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Với $t = 3 \Rightarrow \sqrt{2x+1} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 9x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{10}}{9}$ (thỏa mãn điều kiện (*)).     | <b>0,25</b> |
| Với $t = -4 \Rightarrow \sqrt{2x+1} = -4x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 16x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{17}}{16}$ (thỏa mãn điều kiện (*)). | <b>0,25</b> |
| Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{1+\sqrt{10}}{9}$ và $x = \frac{1-\sqrt{17}}{16}$ .                                                                                       |             |

b) Trên một đường tròn, lấy 2024 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xen kẽ nhau. Mỗi điểm được gán với một giá trị là một số thực khác không, giá trị của mỗi điểm màu xanh bằng tổng giá trị của hai điểm màu đỏ kề với nó, giá trị của mỗi điểm màu đỏ bằng tích giá trị của hai điểm màu xanh kề với nó. Tính tổng giá trị của 2024 điểm trên.

| Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Điểm        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
|  <p>Gọi <math>a, b</math> lần lượt là hai giá trị được gán vào hai điểm màu xanh liên kề (<math>ab \neq 0</math>), khi đó giá trị được gán vào điểm màu đỏ xen kẽ nó theo chiều kim đồng hồ được viết dạng <math>a.b</math>.</p> | <b>0,25</b> |
| Theo quy luật điểm màu xanh và màu đỏ, ta suy ra giá trị của 5 điểm tiếp theo theo chiều kim đồng hồ thứ tự sẽ là: $b-ab, 1-a, (1-a)(1-b), 1-b, a(1-b)$ .                                                                                                                                                           | <b>0,25</b> |
| Khi đó tổng của 8 giá trị được gán ở trên là :<br>$a + ab + b + (b-ab) + (1-a) + (1-a)(1-b) + (1-b) + a(1-b) = 3$ .                                                                                                                                                                                                 | <b>0,25</b> |
| Mặt khác theo quy luật đó, giá trị điểm thứ 9 theo chiều kim đồng hồ là $a$<br>Như vậy 2024 giá trị trên được chia thành $\frac{2024}{8} = 253$ nhóm, mỗi nhóm gồm 8 giá trị theo quy luật trên.<br>Suy ra tổng giá trị 2024 điểm trên bằng $253.3 = 759$ .                                                         | <b>0,25</b> |

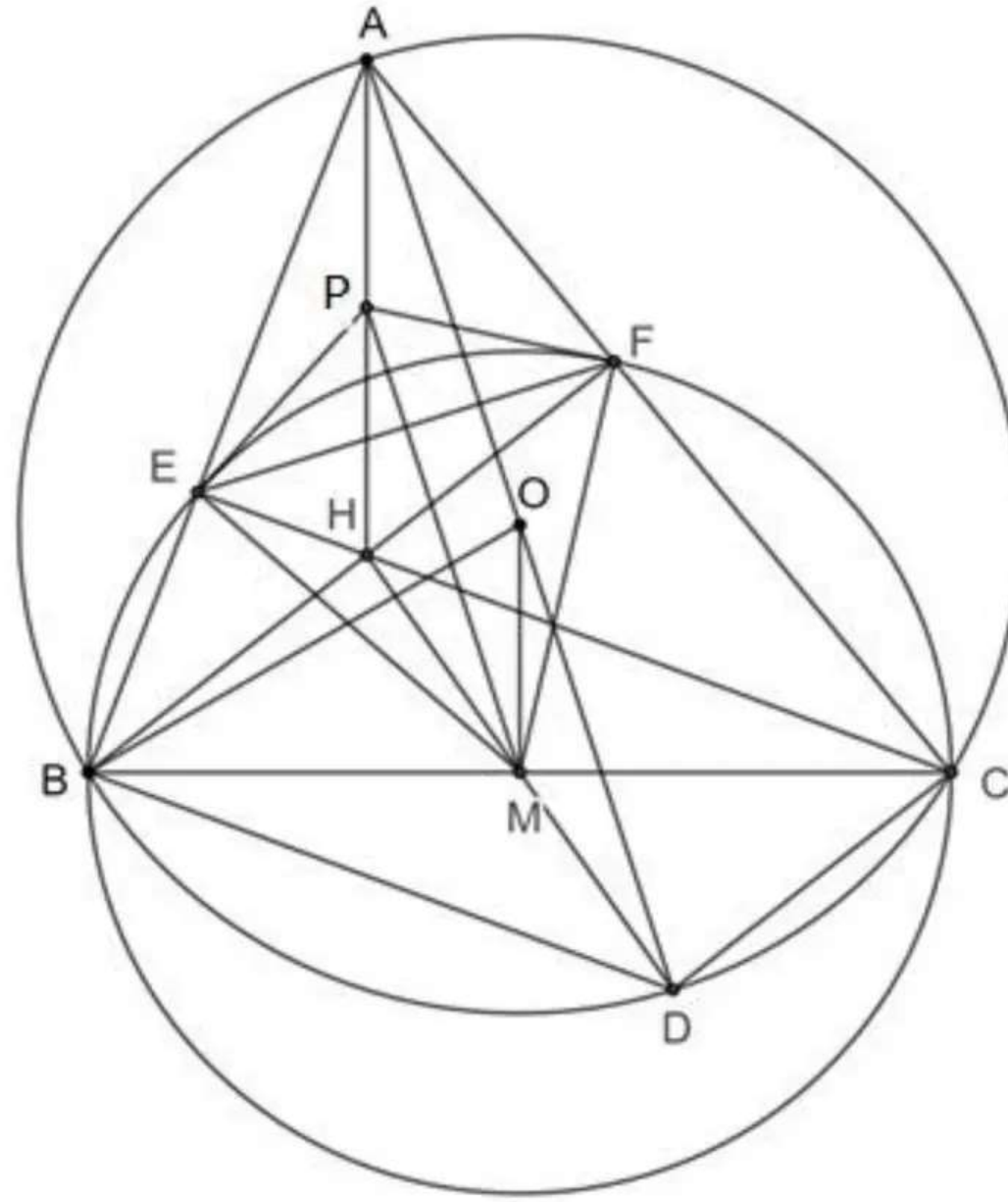
**Câu 4 (3,0 điểm).** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R=4cm$ ,  $BC=4\sqrt{3}cm$ . Đường tròn đường kính  $BC$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $E, F$  ( $E$  khác  $B$  và  $F$  khác  $C$ ). Gọi  $H$  là giao điểm của  $BF$  và  $CE$ .

a) Chứng minh rằng tứ giác  $AEHF$  nội tiếp đường tròn và tính bán kính của đường tròn đó.



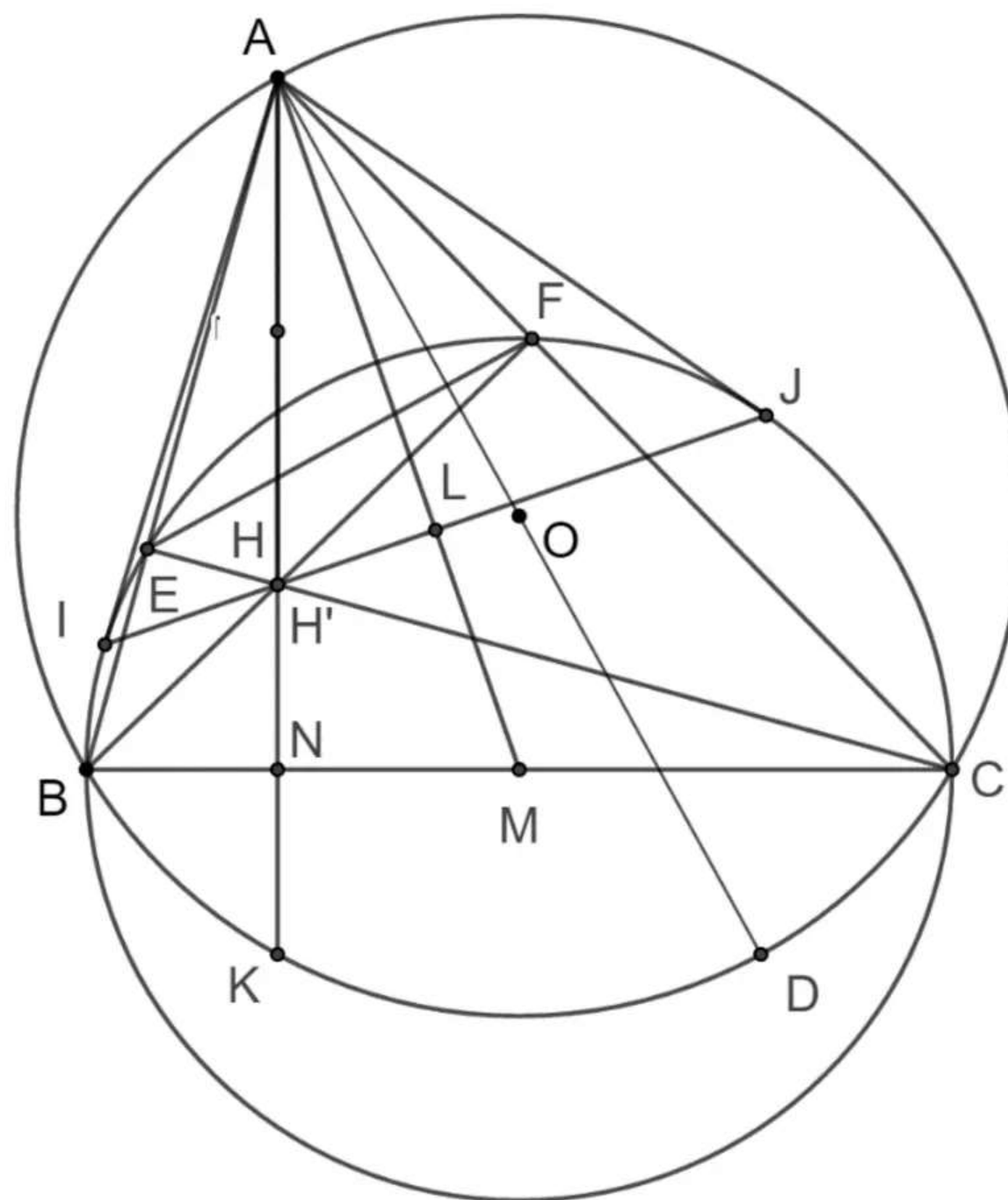
| Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Điểm |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Ta có $BEC = BFC = 90^\circ \Rightarrow AEH = AFH = 90^\circ$ .                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,25 |
| Xét tứ giác $AEHF$ có: $AEH + AFH = 180^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính $AH = 2R'$ .                                                                                                                                                                                                                               | 0,25 |
| Lấy điểm $D$ đối xứng với điểm $A$ qua $O$ , $M$ là trung điểm $BC$ .<br>Vì $BD, HC$ cùng vuông góc với $AB \Rightarrow BD \parallel HC$ ;<br>$BH, DC$ cùng vuông góc với $AC \Rightarrow BH \parallel DC \Rightarrow HBDC$ là hình bình hành.<br>$\Rightarrow HD \cap BC = M \Rightarrow H, M, D$ thẳng hàng và $M$ là trung điểm của $HD$ | 0,25 |
| $\Rightarrow OM$ là đường trung bình của tam giác $DAH$<br>$\Rightarrow R' = \frac{1}{2}AH = OM = \sqrt{BO^2 - BM^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2cm$ .                                                                                                                                                                                  | 0,25 |

b) Chứng minh rằng  $OA \perp EF$ .



| Đáp án                                                                                                        | Điểm |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Gọi $P$ là trung điểm $AH \Rightarrow PM$ là đường trung bình tam giác $AHD \Rightarrow PM \parallel OA$ (1). | 0,25 |
| $ME = MF = R, PE = PF = R'$                                                                                   | 0,25 |
| $\Rightarrow MP$ là trung trực $EF \Rightarrow MP \perp EF$ (2).                                              | 0,25 |
| Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA \perp EF$ .                                                                     | 0,25 |

c) Từ  $A$  kẻ các tiếp tuyến  $AI, AJ$  với đường tròn đường kính  $BC$  ( $I, J$  là tiếp điểm). Đường thẳng  $AH$  cắt đường tròn  $(O, R)$  tại  $K$  ( $K$  khác  $A$ ). Tính  $\frac{HI.HJ}{HK}$ .



| Đáp án                                                                                                                                                                    | Điểm |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $AH \cap BC = N, IJ \cap AN = H', IJ \cap AM = L.$<br>Tứ giác $H'NML$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow AH'.AN = AL.AM = AJ^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông $AJM$ ) | 0,25 |
| Mặt khác $AJ^2 = AF.AC = AH.AN$ (tứ giác $HNCF$ nội tiếp).<br>$\Rightarrow AH'.AN = AH.AN \Rightarrow H \equiv H' \Rightarrow I, H, J$ thẳng hàng.                        | 0,25 |
| Tứ giác $AINJ$ nội tiếp đường tròn (do 5 điểm $A, I, N, M, J$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AM$ ) nên $HI.HJ = HA.HN$                                                 | 0,25 |
| Tam giác $BHK$ cân đỉnh $B \Rightarrow HN = \frac{1}{2}HK \Rightarrow HI.HJ = HA.\frac{1}{2}HK$<br>$\Rightarrow \frac{HI.HJ}{HK} = \frac{1}{2}HA = 2cm.$                  | 0,25 |

**Câu 5 (1,0 điểm).** Cho các số thực dương  $x, y, z$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{2xyz}{x^3 + y^3 + z^3} + \frac{|x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| + |z^3 - x^3|}{3xyz}$$

| Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Điểm |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>Bổ đề:</b> $ x^3 - y^3  +  y^3 - z^3  +  z^3 - x^3  \geq x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$<br>Thật vậy, không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z$ bổ đề cần chứng minh tương đương với<br>$2(x^3 - z^3) \geq x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \Leftrightarrow (x^3 - y^3) + 3(xyz - z^3) \geq 0$ đúng do $x \geq y \geq z$ .                                | 0,25 |
| Áp dụng: $M \geq \frac{2xyz}{x^3 + y^3 + z^3} + \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{3xyz} = \left( \frac{2xyz}{x^3 + y^3 + z^3} + \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3xyz} - \frac{5}{3} \right) + \frac{2}{3}$                                                                                                                                                      | 0,25 |
| Ta chứng minh $\frac{2xyz}{x^3 + y^3 + z^3} + \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3xyz} - \frac{5}{3} \geq 0$ , điều này tương đương với<br>$(x^3 + y^3 + z^3)^2 - 5(x^3 + y^3 + z^3)xyz + 6(xyz)^2 \geq 0$<br>$\Leftrightarrow (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz) \geq 0$<br>Bđt này đúng do $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ (Bất đẳng thức Cauchy). | 0,25 |
| Vậy GTNN của $M = \frac{2}{3}$ khi $x = y = z$ và $x, y, z > 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,25 |

.....Hết.....