

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA
LÀO CAI

NĂM HỌC 2023 – 2024

Vòng 1 – Môn thi: Toán

Ngày thi: 22/9/2023

Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

(Đề thi gồm: 05 câu, 01 trang)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (4,0 điểm). Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ (n+1)u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n) + 2\left(u_{n+1} + \frac{u_n}{n}\right) + 3u_n \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Câu 2 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$, đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm thứ hai là P . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm M . Đường thẳng EF cắt đường thẳng PI tại điểm H .

a) Chứng minh rằng $MP \perp PD$.

b) Chứng minh rằng các điểm M, P, H, D cùng thuộc một đường tròn.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho bảng ô vuông $n \times n$ với n là số nguyên lớn hơn 3, mỗi ô vuông của bảng được điền số 1 hoặc số -1 .

a) Có bao nhiêu cách điền để tích các số trên mỗi hàng và tích các số trên mỗi cột đều bằng 1.

b) Có bao nhiêu cách điền để tổng các số trong mỗi bảng ô vuông 2×2 đều bằng 0.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(9f(x^2) - 22f(y) + 2023y) = 9x^2 + 2001f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng không tồn tại số thực m để $f(x) > m, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng f là toàn ánh.

Câu 5 (3,0 điểm). Giả sử tồn tại số nguyên tố p và các số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{p-1} x^k = y^{11} - 1. \text{ Chứng minh rằng } p < 90.$$

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí của CBCT 1 Chữ kí của CBCT 2