

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 21/10/2023

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

Câu 1 (5 điểm). Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho tồn tại đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

(i) bộ các hệ số $(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0)$ là một hoán vị của $(0, 1, 2, \cdots, n)$;(ii) $P(x)$ có đủ n nghiệm hữu tỷ.**Câu 2 (5 điểm).** Giả sử x, y là hai số bất kỳ thuộc tập hợp $\{2; 3; 4; 5; \cdots; 2^{15}\}$. Chứng minh rằng, tồn tại số nguyên dương n sao cho $x^{2^n} + y^{2^n}$ là hợp số.**Câu 3 (5 điểm).** Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C lên các cạnh AC, AB . Gọi (ω) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Lấy điểm I bất kỳ thay đổi trên đường tròn (O) và J là giao điểm khác A của đường thẳng AI với (ω) . Gọi G là giao điểm khác A của (O) và (ω) .a) Chứng minh rằng, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GIJ luôn thuộc một đường tròn (O') cố định khi I thay đổi.b) Giả sử (O') cắt cạnh BC tại duy nhất một điểm M và MJ cắt (ω) tại P khác J . Chứng minh rằng, trực tâm K của tam giác PAJ luôn thuộc một đường tròn cố định khi I thay đổi.**Câu 4 (5 điểm).** Xét trò chơi: Có một bảng vuông kích thước 10×10 , mỗi lần bấm nút **start** để bắt đầu chơi, máy tính sẽ tô màu ngẫu nhiên một số ô vuông đơn vị nào đó. Để thắng cuộc, người chơi được phép tô màu không quá 19 ô vuông đơn vị chưa được tô màu (có thể không cần phải tô ô nào) sao cho trên bảng vuông 10×10 đó, số ô vuông đơn vị được tô ở mỗi hàng cũng như ở mỗi cột đều là số chẵn (tính cả số 0). Em hãy chứng tỏ rằng, luôn có cách để thắng trò chơi này.

Hết

Thí sinh không sử dụng tài liệu, máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.