

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị dương, khác 1 của x thì biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{4} \right) - \frac{3}{x-2\sqrt{x}+9}$$
 không nhận giá trị nguyên.

b) Xét các bộ số $(x; y; z)$ thỏa mãn $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ với a, b, c là các số khác

$$0. \text{ Tính giá trị của biểu thức } Q = \frac{x^{2020}}{b^2c^2} + \frac{y^{2020}}{c^2a^2} + \frac{z^{2020}}{a^2b^2}$$

Câu 2. (1,0 điểm) Trên đồ thị hàm số $y = -0,5x^2$, cho điểm M có hoành độ dương và điểm N có hoành độ âm. Đường thẳng MN cắt trục Oy tại C , với O là gốc tọa độ. Viết phương trình đường thẳng OM khi C là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMN$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $3x^3 - x^2 + 2x - 28 + (x^3 - 4)\sqrt{x^3 - 7} = 0(1)$

b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 3x + 4xy - x^2 = 3y(y + 3) \\ \sqrt{x^2 - 6y + 1} + \sqrt{y^2 - 2y + 9} = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 4. (1,0 điểm) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình:

$$(2x^2 + x - m^2 + 2m - 15)(2x^2 + 3x - m^2 + 2m - 14) = 0$$

có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3x_2x_3$

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác nhọn $ABC (\angle B \neq \angle C)$ nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao xuất phát từ B và C lần lượt cắt đường thẳng AO tại D và E . Gọi H là trực tâm tam giác ABC và O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDE . Chứng minh rằng:

a) $\triangle HDE \sim \triangle ABC$ và AH là tiếp tuyến của đường tròn (O')

b) Đường thẳng AO' đi qua trung điểm của đoạn BC

Câu 6. (1,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB \neq AC$), nội tiếp đường tròn tâm O . Kẻ đường phân giác $AD (D \in BC)$ của tam giác đó. Lấy điểm E đối xứng với D qua trung điểm của đoạn BC . Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AO của H , đường thẳng vuông góc với BC tại E cắt AD ở K . Chứng minh rằng tứ giác $BHCK$ nội tiếp

Câu 7. (1,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}} + \sqrt{\frac{y^2+z^2}{yz(y+z)}} + \sqrt{\frac{z^2+x^2}{zx(z+x)}} + 3 \leq \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{x+y}{xy}} + \sqrt{\frac{y+z}{yz}} + \sqrt{\frac{z+x}{zx}} \right)$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Với mọi x dương và khác 1, ta có biểu thức A bằng:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{4} \right) - \frac{3}{x-2\sqrt{x}+9} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}+1-x-2\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{1-x}{4\sqrt{2}} - \frac{3}{x-2\sqrt{x}+9} \\ &= 1 - \frac{3}{x-2\sqrt{x}+9} \end{aligned}$$

Vì vậy, biểu thức A nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow$ biểu thức $B = \frac{3}{x-2\sqrt{x}+9}$ nhận giá trị nguyên

Mặt khác, ta có $x-2\sqrt{x}+9 = (\sqrt{x}-1)^2 + 8 \geq 8 \Rightarrow 0 < B \leq \frac{3}{8} < 1$. Nên B không thể nhận giá

trị nguyên, nên A không thể nhận giá trị nguyên

b) Với $a, b, c \neq 0$ ta có biểu thức $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ (*) tương đương với:

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{b^2+c^2}{a^2} \right) + y^2 \left(\frac{c^2+a^2}{b^2} \right) + z^2 \left(\frac{a^2+b^2}{c^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Ta có các biểu thức $\left(\frac{b^2+c^2}{a^2} \right), \left(\frac{c^2+a^2}{b^2} \right), \left(\frac{a^2+b^2}{c^2} \right)$ đều lớn hơn 0

Giả sử tồn tại 1 số trong x, y, z khác 0. Suy ra :

$$x^2 \left(\frac{b^2+c^2}{a^2} \right) + y^2 \left(\frac{c^2+a^2}{b^2} \right) + z^2 \left(\frac{a^2+b^2}{c^2} \right) > 0 \text{ (mâu thuẫn)}$$

Vậy $x = y = z = 0 \Rightarrow Q = 0$

Câu 2.

Giả sử C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN .

$$\Rightarrow CM = CN = CO$$

Đặt $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N), C(0; y_C)$

$$\text{Do } CM = CN \Rightarrow |x_M| = |x_N| \Rightarrow y_M = y_N \Rightarrow MN // Ox$$

Từ đó ta được $\triangle OMN$ vuông cân tại O. suy ra $|y_M| = |x_M|$

$$\text{Mà } y_M < 0, x_M > 0 \Rightarrow y_M = -x_M$$

$\Rightarrow$ đường thẳng OM có phương trình $y = -x$

Câu 3.

a) Điều kiện xác định: $x \geq \sqrt[3]{7} (*)$. Với điều kiện $(*)$, phương trình (1) tương đương:

$$\begin{aligned} (x^3 - 7)\sqrt{x^3 - 7} + 4(x^3 - 7) + 3\sqrt{x^3 - 7} &= x^3 + x^2 - 2x \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^3 - 7})^3 + 4(\sqrt{x^3 - 7})^2 + 3\sqrt{x^3 - 7} &= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 4(x^2 - 2x + 1) + 3(x - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^3 - 7})^3 + 4(\sqrt{x^3 - 7})^2 + 3\sqrt{x^3 - 7} &= (x - 1)^3 + 4(x - 1)^2 + 3(x - 1) \quad (i) \end{aligned}$$

Đặt $a = \sqrt{x^3 - 7}, b = x - 1 (a, b > 0)$. Thay vào phương trình (i) ta được :

$$a^3 + 4a^2 + 3a = b^3 + 4b^2 + 3b \Leftrightarrow a^3 - b^3 + 4(a^2 - b^2) + 3(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)[a^2 + ab + b^2 + 4(a + b) + 3] = 0$$

$$\text{Do } a^2 + ab + b^2 + 4(a + b) + 3 > 0 \Rightarrow a = b$$

$$a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^3 - 7} = x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 7 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 (\text{do } x^2 + x + 4 > 0)$$

Thử lại $x = 2$ vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 4xy - x^2 = 3y(y + 3) & (i) \\ \sqrt{x^2 - 6y + 1} + \sqrt{y^2 - 2x + 9} = \frac{8}{3} & (ii) \end{cases}$$

$$\text{ĐKXD: } x^2 - 6y + 1 > 0; y^2 - 2x + 9 > 0 (*)$$

Với điều kiện trên, ta có phương trình (i) tương đương:

$$x^2 - 4xy - 3x + 3y^2 + 9y = 0 \Leftrightarrow x^2 - xy - 3x - 3xy + 3y^2 + 9y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3y)(x - y - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = y + 3 \end{cases}$$

$$+) x = y + 3 \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 10} + \sqrt{y^2 - 2y + 3} = \frac{8}{3}$$

$$Do \sqrt{y^2 + 10} + \sqrt{y^2 - 2y + 3} = \sqrt{y^2 + 10} + \sqrt{(y-1)^2 + 2} \geq \sqrt{10} + \sqrt{2} > \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow x, y \in \emptyset$$

$$+) x = 3y \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow \sqrt{9y^2 - 6y + 1} + \sqrt{y^2 - 6y + 9} = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x-1)^2} + \sqrt{(y-3)^2} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow |3x-1| + |y-3| = \frac{8}{3} (iii)$$

$$*) y < \frac{1}{3} \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow 4 - 4y = \frac{8}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} (ktm)$$

$$*) \frac{1}{3} \leq y < 3 \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow 2y + 2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 (tm)$$

$$*) y \geq 3 \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow 4y - 4 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow y = \frac{5}{3} (ktm)$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất } (x; y) = \left(1; \frac{1}{3}\right)$$

Câu 4.

Gọi phương trình ban đầu là (*). Xét hai phương trình:

$$2x^2 + x - m^2 + 2m - 15 = 0 (1)$$

$$2x^2 + 3x - m^2 + 2m - 14 = 0 (2)$$

$$\text{Ta có: } \Delta_{(1)} = \Delta_{(2)} = 8m^2 - 16m + 121 = 8(m-1)^2 + 113 \geq \sqrt{113}$$

Vậy hai phương trình (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \in \mathbb{R}$

$$\text{Đặt } T = \sqrt{\Delta_{(1)}} = \sqrt{\Delta_{(2)}} = \sqrt{8(m-1)^2 + 113} \geq \sqrt{113}$$

$$\text{Phương trình (1) có 2 nghiệm } \frac{-1 \pm T}{4}$$

Phương trình (2) có hai nghiệm là: $\frac{-3 \pm T}{4}$

Nhận thấy rằng $\frac{-1+T}{4} > \frac{-3+T}{4} > 0$ và $\frac{-3-T}{4} < \frac{-1+T}{4} < 0$. Suy ra phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung

Từ đó suy ra phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \left\{ \frac{-1 \pm T}{4}; \frac{-3 \pm T}{4} \right\}$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \left(\frac{-1+T}{4} \right)^2 + \left(\frac{-1-T}{4} \right)^2 + \left(\frac{-3+T}{4} \right)^2 + \left(\frac{-3-T}{4} \right)^2 = \frac{T^2 + 5}{4}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_3 > x_2$

Giả sử tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3x_2x_3$ (**)

$$\Rightarrow 3x_2x_3 = \frac{T^2 + 5}{4} > 0. \text{ Suy ra } x_2, x_3 \text{ cùng dương hoặc cùng âm}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_2; x_3) = \left(\frac{-3+T}{4}; \frac{-1+T}{4} \right) \\ (x_2; x_3) = \left(\frac{-3-T}{4}; \frac{-1-T}{4} \right) \end{cases}$$

$$+) x_2 = \frac{-3+T}{4}; x_3 = \frac{-1+T}{4}$$

$$\Leftrightarrow (**) \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{3+4T+T^2}{16} = \frac{T^2+5}{4} \Leftrightarrow 9+12T+3T^2 = 4T^2+20$$

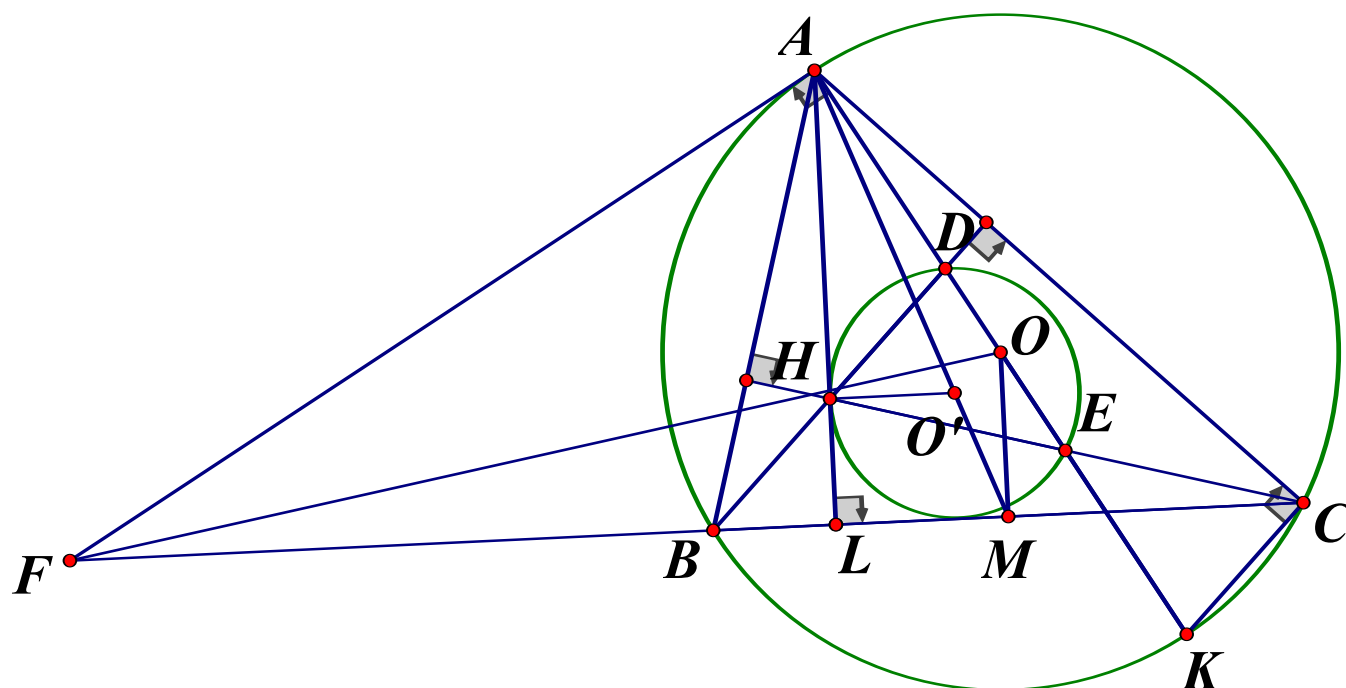
$$\Leftrightarrow T^2 - 2T + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T = 1 \text{ (kTM do } T > \sqrt{113}) \\ T = 11 \text{ (TM)} \Rightarrow 8m^2 - 16m + 121 = T^2 = 121 \Rightarrow 8m^2 - 16m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$+) x_2 = \frac{-3-T}{4}, x_3 = \frac{-1-T}{4}$$

$$\Rightarrow (**) \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{3-4T+T^2}{16} = \frac{T^2+5}{4} \Leftrightarrow 9-12T+3T^2 = 4T^2+20$$

$$\Leftrightarrow T^2 + 12T + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T = -1 \\ T = -11 \end{cases} \text{ (kTM do } T > 0)$$

Câu 5.



- a) Không mất tính tổng quát, giả sử $AB < AC$. Gọi AL là đường cao của tam giác ABC , AF là tiếp tuyến của (O) ($L, F \in BC$), AK là đường kính

Ta có: $\angle ABC = \angle AKC, \angle ALB = \angle ACK = 90^\circ \Rightarrow \angle BAL = \angle KAC$ và $\angle BAK = \angle CAL$

Suy ra $\angle DEH = 90^\circ - \angle BAK = 90^\circ - \angle CAH = \angle ACB$.

Tương tự ta được $\angle HDE = \angle ABC \Rightarrow \triangle HDE \sim \triangle ABC$

Lại có $\angle AHD = 90^\circ - \angle CAH = \angle ACB = \angle HED$

Vì vậy AH tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác HED tại H

- b) Gọi giao điểm của AO' với BC là M

Ta có: $\triangle ABF \sim \triangle HDA (g.g) \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle HO'D (g.g)$

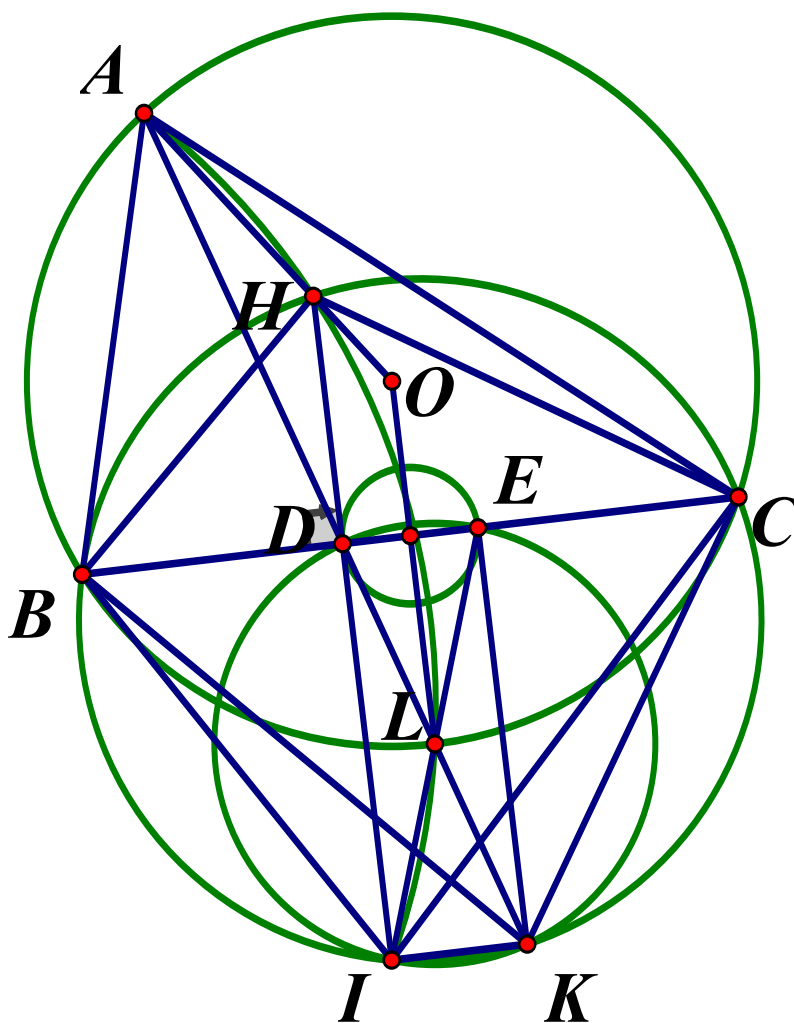
Suy ra $\frac{AF}{AH} = \frac{AB}{HD} = \frac{OA}{O'H} \Rightarrow \triangle OAF \sim \triangle O'HA (c.g.c)$

$\Rightarrow \angle AOF = \angle AO'H = \angle AMF (HO' \parallel BC) \Rightarrow AOMF$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $OM \perp BC \Rightarrow M$ là trung điểm BC

Vậy AO' đi qua M là trung điểm BC

Câu 6.



Gọi L là điểm chính giữa cung nhỏ BC của đường tròn (O)

Do $OL \parallel EK \Rightarrow L$ là trung điểm DK . Gọi I là điểm đối xứng với E qua L

Suy ra $DEKI$ là hình chữ nhật, $BIKC$ là hình thang cân và I, D, H thẳng hàng.

Lại có $\angle AIL = \angle LAI = \angle IDH$ (Do $OL \parallel DI$) $\Rightarrow AHLI$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $DI \cdot DH = DA \cdot DL = DB \cdot DC$. Suy ra tứ giác $BHCI$ nội tiếp.

Lại có $BIKC$ nội tiếp nên suy ra tứ giác $BHCK$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 7.

Trước tiên ta có hai bổ đề quen thuộc

Bổ đề 1. Cho a, b, c, x, y, z là các số thực và $x, y, z > 0$, khi đó:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Chứng minh: Trước tiên ta chứng minh $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$. Biến đổi tương đương bất đẳng thức, ta được:

$$a^2y(x+y) + b^2x(x+y) \geq (a+b)^2xy \Leftrightarrow (ay-bx)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng. Suy ra:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Bổ đề 2: Cho 2 số $a, b > 0$. Khi đó $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Chứng minh: Từ bất đẳng thức đúng $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, suy ra :

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 2(a+b) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$

Bổ đề 3. Cho 3 số thực dương x, y, z . Khi đó

$$x+y+z \geq 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}}. \text{ Chứng minh: Thật vậy, ta có:}$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2 \geq \frac{1}{3} \left[\frac{(1+1+1)^2}{x+y+z} \right]^2 = \frac{27}{(x+y+z)^2}$$

$$\text{Suy ra } x+y+z \geq 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$

Trở lại bài toán, đặt bất đẳng thức cần chứng minh là (*). Áp dụng **Bổ đề 2**, ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2(x+y)}{xy}} &= \sqrt{\frac{2(x+y)^2}{xy(x+y)}} = \sqrt{2\left(\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)} + \frac{2xy}{xy(x+y)}\right)} \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}} + \sqrt{\frac{2}{x+y}} \\ \Rightarrow VP(*) &\geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}} + \sqrt{\frac{y^2+z^2}{yz(y+z)}} + \sqrt{\frac{z^2+x^2}{zx(z+x)}} + \sqrt{\frac{2}{x+y}} + \sqrt{\frac{2}{y+z}} + \sqrt{\frac{2}{z+x}}\end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng **Bổ đề 3**, ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{x+y}} + \sqrt{\frac{2}{y+z}} + \sqrt{\frac{2}{z+x}} &\geq 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{x+y}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{y+z}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{z+x}}\right)^2}} \\ &= 3\sqrt{\frac{3}{x+y+z}} \geq 3\sqrt{\frac{3}{3}} = 3\end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$