

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Môn thi : Toán

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi : 10/4/2021

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{13 + 30\sqrt{4 + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}}; B = \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{12 - \frac{4(4 - \sqrt{3})^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{12 - \frac{4(4 - \sqrt{3})^3}{27}}}{2}}.$$

b) Tìm giá trị của tham số m để phương trình $(x-1)\sqrt{2x-1} - mx + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $4\sqrt{3+2x} = 3x - 1 + 4\sqrt{4-x}$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + 4y + 1 = 0 \\ 3x^2 - y(x-y)^2 + 10y + 3 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh bằng 6cm , điểm M nằm trên cạnh BC .

a) Khi $BM = 2\text{cm}$, hạ OK vuông góc với AM tại K . Tính độ dài đoạn thẳng OK .

b) Khi điểm M thay đổi trên cạnh BC (M không trùng B và C), điểm N thay đổi trên cạnh CD sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$, E là giao điểm của AN và BD . Chứng minh tam giác AEM vuông cân và đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Câu 4. (4,5 điểm)

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A ($R > r$). Dựng lần lượt hai tiếp tuyến $OB, O'C$ của hai đường tròn $(O'; r), (O; R)$ sao cho hai tiếp điểm B, C nằm cùng phía đối với đường thẳng OO' . Từ B vẽ đường thẳng vuông góc với OO' cắt $O'C$ tại K , từ C vẽ đường thẳng vuông góc với OO' cắt OB tại H .

a) Gọi D là giao điểm của OB và $O'C$. Chứng minh $DO \cdot BO' = CO \cdot DO'$ và DA là tia phân giác của góc $\widehat{ODO'}$.

b) Đường thẳng AH cắt đường tròn $(O; R)$ tại E (E khác A). Chứng minh tứ giác $OABE$ nội tiếp đường tròn.

c) Đường thẳng AK cắt đường tròn $(O'; r)$ tại F (F khác A), L là giao điểm của BC và EF . Chứng minh BF song song với CE và 3 điểm A, D, L thẳng hàng.

Câu 5. (5,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức

$$x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 3xy + 6x = 0.$$

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{x + 2yz} + \frac{1}{y + 2zx} + \frac{1}{z + 2xy}.$$

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh: Phòng thi: Số báo danh:

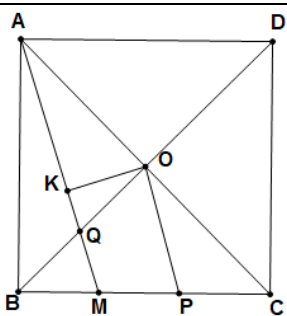
HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

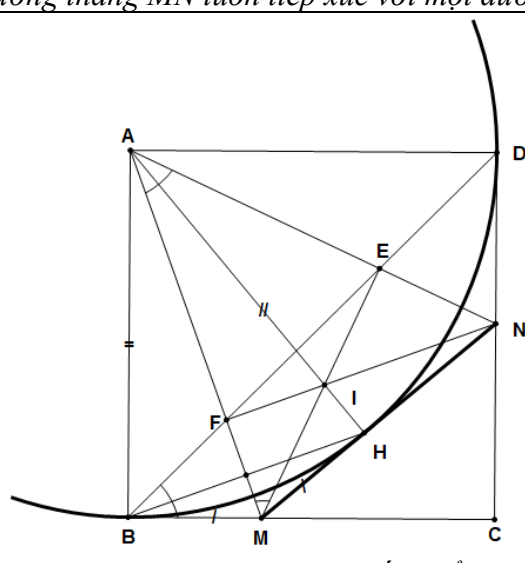
Môn: TOÁN

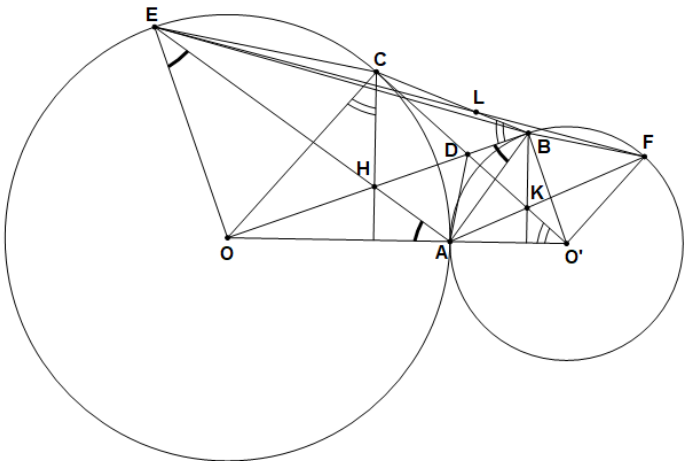
(Hướng dẫn chấm này có 06 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (4,5 đ)	a) Rút gọn các biểu thức sau: $A = \sqrt{13 + 30\sqrt{4 + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}}$, $B = \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{12 - \frac{4(4 - \sqrt{3})^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{12 - \frac{4(4 - \sqrt{3})^3}{27}}}{2}}.$	2,5
	Ta có $A = \sqrt{13 + 30\sqrt{4 + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}} = \sqrt{13 + 30\sqrt{4 + \sqrt{(2\sqrt{2} - 1)^2}}}$	0,25
	$= \sqrt{13 + 30\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt{13 + 30(\sqrt{2} + 1)}$	0,5
	$= \sqrt{43 + 30\sqrt{2}} = \sqrt{(5 + 3\sqrt{2})^2} = 5 + 3\sqrt{2}$	0,5
	Đặt $a = \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{12 - \frac{4(4 - \sqrt{3})^3}{27}}}{2}}$, $b = \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{12 - \frac{4(4 - \sqrt{3})^3}{27}}}{2}}$ Suy ra $a^3 + b^3 = 2\sqrt{3}$.	0,25
	$ab = \sqrt[3]{\frac{12 - \left[12 - \frac{4(4 - \sqrt{3})^3}{27}\right]}{4}} = \frac{4 - \sqrt{3}}{3}$	0,25
	$a^3 + b^3 = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow (a + b)^3 - (4 - \sqrt{3})(a + b) = 2\sqrt{3}$	0,25
	$\Leftrightarrow (a + b)^3 - 4(a + b) + \sqrt{3}(a + b) - 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (a + b - 2)\left[(a + b)(a + b + 2) + \sqrt{3}\right] = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow a + b = 2$ (vì $a > 0$, $b > 0$). Vậy $B = 2$.	0,25
	b) Tìm giá trị của tham số m để phương trình $(x-1)\sqrt{2x-1} - mx + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.	1,5
	Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$	0,25
	$(x-1)\sqrt{2x-1} - mx + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{2x-1} - m) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (thỏa)} \\ \sqrt{2x-1} = m \end{cases}$	0,5
	$\sqrt{2x-1} = m \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ x = \frac{m^2 + 1}{2} \end{cases}$	0,25
	+ Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} m \geq 0 \\ \frac{m^2 + 1}{2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$	0,5

Câu 2 (4,0 đ)	a) Giải phương trình $4\sqrt{3+2x} = 3x-1+4\sqrt{4-x}$	2,0
	Điều kiện: $\begin{cases} 3+2x \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq 4$	0,25
	$4\sqrt{3+2x} = 3x-1+4\sqrt{4-x} \Leftrightarrow 4(\sqrt{3+2x} - \sqrt{4-x}) = 3x-1 (*)$	0,25
	Do $\sqrt{3+2x} + \sqrt{4-x} = 0$ vô nghiệm nên pt(*) tương đương với phương trình $4(\sqrt{3+2x} - \sqrt{4-x})(\sqrt{3+2x} + \sqrt{4-x}) = (3x-1)(\sqrt{3+2x} + \sqrt{4-x})$	0,25
	$\Leftrightarrow 4(3x-1) = (3x-1)(\sqrt{3+2x} + \sqrt{4-x}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ \sqrt{3+2x} + \sqrt{4-x} = 4 \end{cases}$	0,5
	$3x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (thỏa mãn) $\sqrt{3+2x} + \sqrt{4-x} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{(3+2x)(4-x)} = 9-x$	0,25
	$\Leftrightarrow 9x^2 - 38x + 33 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{11}{9} \end{cases}$ (thỏa mãn)	0,25
	Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = \frac{1}{3}, x = \frac{11}{9}, x = 3$.	0,25
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + 4y + 1 = 0 \\ 3x^2 - y(x-y)^2 + 10y + 3 = 0 \end{cases}$	2,0
	$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + 4y + 1 = 0 \\ 3x^2 - y(x-y)^2 + 10y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1) - y(x-y) = -4y \\ 3(x^2+1) - y(x-y)^2 = -10y \end{cases} (*)$	0,25
	- Nhận xét $y = 0$ không thỏa hệ.	0,25
	- Khi $y \neq 0$: Hệ phương trình (*) tương đương với hệ: $\begin{cases} \frac{x^2+1}{y} - (x-y) = -4 \\ 3\left(\frac{x^2+1}{y}\right) - (x-y)^2 = -10 \end{cases} (**)$	
	Đặt $\frac{x^2+1}{y} = a, x-y = b$, khi đó hệ (**) trở thành: $\begin{cases} a-b = -4 \\ 3a-b^2 = -10 \end{cases}$	0,5
	+ Giải hệ trên tìm được: $\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}, \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$	0,25
	$+ \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} = -2 \\ x-y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases}$ $+ \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} = -3 \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-5+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$	0,5
	Lưu ý: $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + 4y + 1 = 0 \\ 3x^2 - y(x-y)^2 + 10y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = -y^2 + xy - 4y \\ 3(x^2 + 1) - y(x-y)^2 + 10 = 0 \end{cases}$ Thay $x^2 + 1 = -y^2 + xy - 4y$ vào phương trình thứ hai.	

Câu 3 (2,5 đ)	Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh bằng 6 cm , điểm M nằm trên cạnh BC .	2,5
	a) Khi $BM = 2\text{ cm}$, hạ OK vuông góc với AM tại K . Tính độ dài đoạn thẳng OK .	1,0
		
	+ Gọi Q là giao điểm của AM và BD , P là trung điểm của MC . Suy ra $OP \parallel AM$. + Trong tam giác OBP có $MB = MP$ và $MQ \parallel OP$. Suy ra Q là trung điểm của OB .	0,25
	+ $BD = 6\sqrt{2} \Rightarrow OQ = \frac{6\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OQ^2} = \frac{1}{(3\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{5}{18}$	0,5
	$\Rightarrow OK = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$	0,25

	b) Khi điểm M thay đổi trên cạnh BC (M không trùng B và C), điểm N thay đổi trên cạnh CD sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$, E là giao điểm của AN và BD . Chứng minh tam giác AEM vuông cân và đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.	1,5
		0,25
	(Không có hình không chấm điểm)	
	+ $\widehat{MAN} = \widehat{MBE} = 45^\circ$. Suy ra tứ giác $ABME$ nội tiếp.	0,25
	Mà $\widehat{ABM} = 90^\circ$ nên $\widehat{AEM} = 90^\circ$. Vậy tam giác AEM vuông cân tại E .	0,25
	+ Gọi F là giao điểm của AM và BD . Tương tự suy ra $\widehat{AFN} = 90^\circ$ + Gọi I là giao điểm của EM và FN , H là giao điểm của AI và MN . Suy ra AH vuông góc với MN .	0,25
	+ Xét hai tam giác vuông ABM và AHM có: AM chung; + $\widehat{AMB} = \widehat{AEB}$, $\widehat{AEB} = \widehat{AMH}$ (vì tứ giác $MNEF$ nội tiếp). Do đó $\widehat{AMB} = \widehat{AMH}$	0,25
	Suy ra hai tam giác vuông ABM và AHM bằng nhau. Suy ra $AH = AB = 6\text{ cm}$ (không đổi). Do đó MN luôn cách A một khoảng cách bằng 6 cm . Suy ra MN luôn tiếp xúc với đường tròn tâm A , bán kính bằng 6 cm .	0,25

Câu 4 (4,5 đ)	Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A ($R > r$). Dựng lần lượt hai tiếp tuyến $OB, O'C$ của hai đường tròn $(O'; r), (O; R)$ sao cho hai tiếp điểm B, C nằm cùng phía đối với đường thẳng OO' . Từ B vẽ đường thẳng vuông góc với OO' cắt $O'C$ tại K , từ C vẽ đường thẳng vuông góc với OO' cắt OB tại H .	4,5
	a) Gọi D là giao điểm của OB và $O'C$. Chứng minh $DO \cdot BO' = CO \cdot DO'$ và DA là tia phân giác của góc $\widehat{ODO'}$.	1,5
	 (Không có hình vẽ không chấm)	0,25
	Xét hai tam giác ODC và $O'DB$ có: $\widehat{ODC} = \widehat{O'DB}$;	0,25
	+ Tứ giác $OO'BC$ nội tiếp đường tròn đường kính OO' nên $\widehat{DOC} = \widehat{DO'B}$.	0,25
	Suy ra hai tam giác ODC và $O'DB$ đồng dạng, do đó:	0,25
	$\frac{DO}{DO'} = \frac{CO}{BO'} \Leftrightarrow DO \cdot BO' = CO \cdot DO'$	0,25
	Ta có: $\frac{DO}{DO'} = \frac{CO}{BO'} = \frac{AO}{AO'}$. Suy ra DA là tia phân giác của góc $\widehat{ODO'}$.	0,5
	b) Đường thẳng AH cắt đường tròn $(O; R)$ tại E (E khác A). Chứng minh tứ giác $OABE$ nội tiếp đường tròn.	1,5
	+ $\widehat{OCH} = \widehat{OO'C}$ (Cùng phụ với $\widehat{O'CH}$)	0,25
	+ $\widehat{OO'C} = \widehat{OBC}$ (Cùng chắn cung $\widehat{OC}$)	0,25
	Suy ra $\widehat{OCH} = \widehat{OBC}$. Suy ra hai tam giác OCH, OBC đồng dạng	0,25
	$\Rightarrow \frac{OC}{OH} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow \frac{OA}{OH} = \frac{OB}{OA}$	0,25
	Suy ra hai tam giác OHA, OAB đồng dạng.	0,25
	$\Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{OBA}$ hay $\widehat{OEA} = \widehat{OBA}$. Vậy tứ giác $OABE$ nội tiếp trong đường tròn.	0,25
	c) Đường thẳng AK cắt đường tròn $(O'; r)$ tại F (F khác A), L là giao điểm của BC và EF . Chứng minh BF song song với CE và 3 điểm A, D, L thẳng hàng.	1,5
	$\widehat{EOB} = \widehat{EAB} = 180^\circ - \widehat{OAE} - \widehat{O'AB} = 180^\circ - \widehat{OBA} - \widehat{O'BA} = 90^\circ$	0,5
	Mà $\widehat{OBO'} = 90^\circ$ nên $OE \parallel O'B$. Tương tự $O'F \parallel OC$. Suy ra $\widehat{EOC} = \widehat{BO'F}$	0,25
	Lại có: hai tam giác EOC và $BO'F$ là hai tam giác cân. Suy ra $\widehat{ECO} = \widehat{BFO'}$ Hơn nữa $OE \parallel O'B$ nên $BF \parallel EC$ (lưu ý $O'B \parallel OE$)	0,25
	$\frac{LC}{LB} = \frac{EC}{BF} = \frac{OE}{O'B} = \frac{OA}{O'A} = \frac{OC}{O'B} = \frac{DC}{DB}$	0,25
	Suy ra DL là tia phân giác của góc $\widehat{BDC}$. Suy ra A, D, L thẳng hàng.	0,25

Câu 5	a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức $x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 3xy + 6x = 0.$	3,0
	$x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 3xy + 6x = 0$ $\Leftrightarrow (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (y^3 - 3y^2 + 3y - 1) - 3xy + 3x - 3y = 0$ $\Leftrightarrow (x+1)^3 + (y-1)^3 - 3(x+1)(y-1) - 3 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow [(x+1) + (y-1)]^3 - 3(x+1)(y-1)[(x+1) + (y-1)] - 3(x+1)(y-1) - 3 = 0$	
	Đặt $a = (x+1) + (y-1)$, $b = (x+1)(y-1)$ Khi đó ta có: $a^3 - 3ab - 3b - 3 = 0 \Leftrightarrow a^3 - 3 = 3b(a+1)$	0,25
	Suy ra $a^3 - 3 = [(a^3 + 1) - 4] : (a+1) \Rightarrow 4 : (a+1)$	0,25
	+ Với $a+1 = -4 \Leftrightarrow a = -5 \Rightarrow b = \frac{32}{3}$ (không thỏa)	0,25
	+ Với $a+1 = -1 \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow b = \frac{11}{3}$ (không thỏa)	0,25
	+ Với $a+1 = 2 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$ (không thỏa)	0,25
	+ Với $a+1 = 1 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow b = -1$. Tìm được $(x, y) = (0, 0)$; $(x, y) = (-2, 2)$	0,5
	+ Với $a+1 = 4 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow b = 2$. Tìm được $(x, y) = (0, 3)$; $(x, y) = (1, 2)$	0,5
	+ Với $a+1 = -2 \Leftrightarrow a = -3 \Rightarrow b = 5$ (không tồn tại x, y)	0,25
	b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x+2yz} + \frac{1}{y+2zx} + \frac{1}{z+2xy}$.	2,0
	Ta có: $A = \frac{1}{x+2yz} + \frac{1}{y+2zx} + \frac{1}{z+2xy} = \frac{x}{x^2+2} + \frac{y}{y^2+2} + \frac{z}{z^2+2}$	0,25
	$x^2 + 2 = (x^2 + 1) + 1 \geq 2x + 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2 + 2} \leq \frac{x}{2x + 1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x + 1} \right)$ Tương tự: $\frac{y}{y^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2y + 1} \right)$, $\frac{z}{z^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2z + 1} \right)$	0,5
	Suy ra $A \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} + \frac{1}{2z+1} \right)$	0,25
	Đặt $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$, $z = \frac{c}{a}$ ($a, b, c > 0$). $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} + \frac{1}{2z+1} = \frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a}$	0,25
	$= \frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2} + \frac{a^2}{2ca+a^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2ab+b^2+2bc+c^2+2ca+a^2} = 1$ (Chứng minh được BĐT: $\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} + \frac{k^2}{z} \geq \frac{(m+n+k)^2}{x+y+z}$ (với các số dương) : 0,25)	0,5
	Suy ra $A \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$ (Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$ hay $x = y = z = 1$) Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 1.	0,25

	Nhận xét: Đặt $x = a^3, y = b^3, z = c^3$ ($a, b, c > 0, abc = 1$) $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} + \frac{1}{2z+1} = \frac{abc}{2a^3+abc} + \frac{abc}{2b^3+abc} + \frac{abc}{2c^3+abc}$ $= \frac{bc}{2a^2+bc} + \frac{ca}{2b^2+ca} + \frac{ab}{2c^2+ab} = \frac{(bc)^2}{2.ca.ab+(bc)^2} + \frac{(ca)^2}{2.ab.bc+(ca)^2} + \frac{(ab)^2}{2.bc.ca+(ab)^2}$ $\geq \frac{(bc+ca+ab)^2}{2.ca.ab+(bc)^2+2.ab.bc+(ca)^2+2.bc.ca+(ab)^2}$ $= \frac{(bc+ca+ab)^2}{(bc+ca+ab)^2} = 1$	
--	---	--

Ghi chú: Nếu học sinh có cách giải khác đúng thì Ban Giám khảo thảo luận và thống nhất thang điểm cho phù hợp với Hướng dẫn chấm.