

ĐỀ CHÍNH THỨC

Số báo danh

MÔN THI: TOÁN

Thời gian 180 phút, không kể thời gian giao đề

Ngày thi: 27/9/2022

(Đề thi có 4 bài, gồm 01 trang)

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (x_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} + (n+1)x_n \cdot x_{n+1} = nx_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (y_n) xác định bởi $y_n = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_{n+1}}{x_n}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x + f(x+y)) + f(xy) = x + f(x+y) + y \cdot f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh AC, AB tại E, F . Đường thẳng BI cắt đường thẳng EF tại M và cắt đường thẳng AC tại P , đường thẳng BO cắt đường thẳng CM tại Q .

a) Chứng minh $MP \cdot MB = MQ \cdot MC$.

b) Dựng tiếp tuyến chung d khác BC của các đường tròn nội tiếp tam giác PBC và tam giác QBC . Chứng minh đường thẳng d song song với đường thẳng PQ .

Bài 4 (5,0 điểm).

a) Cho một nhóm 15 học sinh có chiều cao đôi một khác nhau gồm 5 học sinh nữ có chiều cao tăng dần ký hiệu lần lượt là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 và 10 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 15 học sinh đó theo một hàng ngang sao cho tính từ trái sang phải thì các học sinh nữ có chiều cao tăng dần, các học sinh nam cũng có chiều cao tăng dần, giữa học sinh G_1 và G_2 có ít nhất 3 học sinh nam, giữa học sinh G_4 và G_5 có ít nhất 1 học sinh nam và nhiều nhất 3 học sinh nam.

b) Cho H là một lục giác đều có cạnh bằng 2022. Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho có một cách phân hoạch H thành n hình tam giác có cạnh không lớn hơn 2022 và tổng n tỉ số giữa độ dài cạnh ngắn nhất với độ dài cạnh dài nhất của mỗi tam giác đó không vượt quá $\frac{9n^2 + 10n - 20}{2n^2 + 1}$?

HẾT