

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+3} - 2\sqrt{x+1} = -1$

b) Giải phương trình $\frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2}$

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 4 \\ x^2 + y^2 - \frac{5}{x^2} = 4 - 2xy \end{cases}$$

Câu 2 (1,5 điểm).a) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2p^2 + 3p + 4$ cũng là số nguyên tố.b) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a! + b! + c! = d!$.Cho biết kí hiệu $n!$ là tích các số tự nhiên từ 1 đến n .**Câu 3 (1,0 điểm).** Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \geq 16$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , tia AI cắt đường tròn (O) tại điểm D (khác A). Đường thẳng OD cắt đường tròn (O) tại điểm E (khác D) và cắt cạnh BC tại điểm F .a) Chứng minh rằng tam giác IBD cân. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC .b) Chứng minh $ID \cdot IE = IF \cdot DE$.c) Gọi các điểm M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên các cạnh AB, AC . Gọi H, K lần lượt là các điểm đối xứng với M, N qua I . Biết rằng $AB + AC = 3 \cdot BC$, chứng minh $\angle KBI = \angle HCI$.**Câu 5 (0,5 điểm).** Thầy Du viết số 2020^{2021} thành tổng của các số nguyên dương rồi đem cộng tất cả các chữ số của các số nguyên dương này với nhau. Hỏi thầy Du có thể nhận được kết quả là số 2021 hoặc 2022 được không? Tại sao?

-----Hết-----

Học sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Lưu ý chung:

- Hướng dẫn chỉ trình bày các bước cơ bản của 1 cách giải, nếu học sinh có cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm theo thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Trong một bài, thí sinh giải đúng đến đâu cho điểm đến đó.
- Bài hình học nếu không vẽ hình thì không cho điểm, nếu vẽ hình sai thì không cho điểm ứng với phần vẽ hình sai.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

Câu 1 (4,0 điểm).

a) (1,5 điểm). Giải phương trình $\sqrt{2x+3} - 2\sqrt{x+1} = -1$

Nội dung	Điểm
Điều kiện xác định: $x \geq -1$ Phương trình: $\sqrt{2x+3} - 2\sqrt{x+1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} + 1 = 2\sqrt{x+1}$ $\Leftrightarrow 2x+3+1+2\sqrt{2x+3} = 4(x+1)$	0,5
$\Leftrightarrow 2x+4+2\sqrt{2x+3} = 4x+4 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+3 = x^2 \end{cases}$	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x+1)(x-3) = 0 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -1 \Leftrightarrow x = 3. \\ x = 3 \end{cases}$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.	0,25

b) (1,5 điểm). Giải phương trình $\frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2}$

Nội dung	Điểm
Điều kiện xác định $\begin{cases} x^2+x+3 \neq 0 \\ x^2-5x+3 \neq 0 \end{cases}$ (1)	0,25
+) Nhận xét: $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. +) Với $x \neq 0$: Khi đó phương trình viết được thành $\frac{4}{\frac{x^2+x+3}{x}} + \frac{5}{\frac{x^2-5x+3}{x}} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{x+1+\frac{3}{x}} + \frac{5}{x-5+\frac{3}{x}} = -\frac{3}{2}$	0,25
Đặt $t = x+1+\frac{3}{x}$, thay vào phương trình trên ta được: $\frac{4}{t} + \frac{5}{t-6} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{4(t-6)+5t}{t(t-6)} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 8t-48+10t = -3t^2+18t \Leftrightarrow 3t^2 = 48 \Leftrightarrow t = \pm 4.$	0,5
Với $t = 4$, ta có: $x+1+\frac{3}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2-3x+3 = 0$ vô nghiệm do $\Delta = (-3)^2 - 4.3 = -3 < 0$. Với $t = -4$, ta có: $x+1+\frac{3}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2+5x+3 = 0$, ta có $\Delta = 5^2 - 4.3 = 13 > 0$ suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$. So sánh với điều kiện (1) ta được phương trình có hai nghiệm $x = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}; x = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.	0,5

c) (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 4 \\ x^2 + y^2 - \frac{5}{x^2} = 4 - 2xy \end{cases}$$

Nội dung	Điểm
Điều kiện $x \neq 0$. $\begin{cases} x^2 + xy + x = 4 \\ x^2 + y^2 - \frac{5}{x^2} = 4 - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y+1) - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy - \frac{5}{x^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 = \frac{4}{x} \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} = 4 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{4}{x} - 1 \\ \left(\frac{4}{x} - 1\right)^2 - \frac{5}{x^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{4}{x} - 1 \\ \frac{16}{x^2} - \frac{8}{x} + 1 - \frac{5}{x^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{4}{x} - 1 \\ \frac{11}{x^2} - \frac{8}{x} - 3 = 0 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{4}{x} - 1 \\ 3x^2 + 8x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{4}{x} - 1 \\ (x-1)(3x+11) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{4}{x} - 1 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{11}{3} \end{cases} \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = -\frac{11}{3} \\ y = \frac{52}{33} \end{cases}$ Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2), \left(-\frac{11}{3}; \frac{52}{33}\right)$.	0,25

Câu 2 (1,5 điểm).

a) (0,5 điểm). Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2p^2 + 3p + 4$ là số nguyên tố.

Nội dung	Điểm
Nếu $p:3 \Rightarrow p=3$ thì $2p^2 + 3p + 4 = 31$ là số nguyên tố suy ra $p=3$ thỏa mãn. Nếu $p=3k+1, k \in \mathbb{N}$ thì $2p^2 + 3p + 4 = 2(3k+1)^2 + 3(3k+1) + 4 = 18k^2 + 21k + 9:3$, kết hợp với $2p^2 + 3p + 4 > 3$ suy ra $2p^2 + 3p + 4$ không là số nguyên tố.	0,25
Nếu $p=3k+2, k \in \mathbb{N}$ thì $2p^2 + 3p + 4 = 2(3k+2)^2 + 3(3k+2) + 4 = 18k^2 + 33k + 18:3$, kết hợp với $2p^2 + 3p + 4 > 3$ suy ra $2p^2 + 3p + 4$ không là số nguyên tố.	0,25

b) (1,0 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a! + b! + c! = d!$.

Cho biết kí hiệu $n!$ là tích các số tự nhiên từ 1 đến n .

Nội dung	Điểm
Giả sử $a \leq b \leq c$, kết hợp với giả thiết ta được $1 \leq a \leq b \leq c < d$. *) Nếu $a < b \Rightarrow a! + a!(a+1) \dots b + a!(a+1) \dots c = a!(a+1) \dots d$	0,25

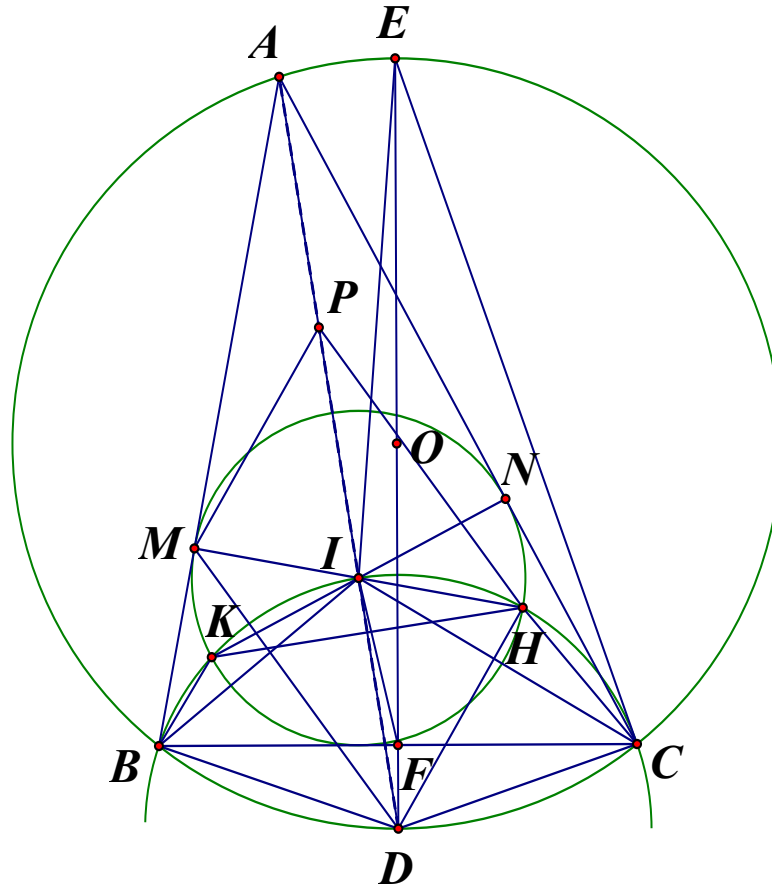
$\Rightarrow 1+(a+1)...b+(a+1)...c=(a+1)...d \Rightarrow 1:a+1$ vô lí.	
*) Nếu $a=b$ thì $2a!+c!=d!$ +) Nếu $a=b < c$ thì từ phương trình trên ta được: $2a!+a!(a+1)...c=a!(a+1)...d \Leftrightarrow 2+(a+1)...c=(a+1)...d$	0,25
Từ phương trình này ta được: $2:a+1 \Rightarrow a=1$ Với $a=1 \Rightarrow b=1$, ta được phương trình $2+c!=d!$ + Nếu $c > 2 \Rightarrow c!:3, d!:3 \Rightarrow 2:3$ vô lí. + Nếu $c=2 \Rightarrow 4=d!$ vô lí.	0,25
+) Nếu $a=b=c$ thì từ phương trình đã cho ta được: $3.a!=d! \Rightarrow 3=(a+1)...d \Rightarrow 3:a+1 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ d=3 \end{cases}$ Vậy $(a,b,c,d)=(2,2,2,3)$.	0,25

Câu 3 (1,0 điểm). Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{8(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} + \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \geq 16$$

Nội dung	Điểm
Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có: $\frac{8(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} + \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \geq 2\sqrt{\frac{8(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} \cdot \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}$ $\geq 2\sqrt{\frac{8(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \cdot \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}} = 12\sqrt{\frac{2(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)(a+b+c)}}$	0,5
Ta sẽ chứng minh $12\sqrt{\frac{2(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)(a+b+c)}} \geq 16 \Leftrightarrow 9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(ab+bc+ca)(a+b+c)$	0,25
$\Leftrightarrow 9[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc] \geq 8[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc]$ $\Leftrightarrow ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$ $\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{c}\right) + \left(\frac{b+c}{a}\right) + \left(\frac{c+a}{b}\right) \geq 6 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 2\right) \geq 0$ $\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} \geq 0 \text{ (luôn đúng). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a=b=c.$ Do đó bất đẳng thức được chứng minh.	0,25

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , tia AI cắt đường tròn (O) tại điểm D (khác điểm A). Đường thẳng OD cắt đường tròn (O) tại điểm E (khác D) và cắt cạnh BC tại điểm F .



a) (1,0 điểm). Chứng minh rằng tam giác IDB cân. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC .

Nội dung	Điểm
Ta có $\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{DBC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} + \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} + \frac{1}{2} \widehat{BAC}$ (1) (do AI, BI lần lượt là phân giác các góc BAC, ABC và tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn).	0,25
Mặt khác $\widehat{BID} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} + \frac{1}{2} \widehat{BAC}$ (do AI, BI tương ứng là phân giác góc BAC, ABC) (2).	0,25
Từ (1) và (2) ta được $\widehat{BID} = \widehat{IBD} \Rightarrow$ tam giác DBI cân tại D .	
Ta có $\widehat{ICD} = \widehat{ICA} + \widehat{DCB} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} + \widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} + \frac{1}{2} \widehat{BAC}$ (3) (do AI, CI lần lượt là phân giác các góc BAC, ACB và tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn).	0,25
Mặt khác $\widehat{CID} = \widehat{ICA} + \widehat{IAC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} + \frac{1}{2} \widehat{BAC}$ (do AI, BI tương ứng là phân giác góc BAC, ABC) (4).	
Từ (3) và (4) ta được $\widehat{CID} = \widehat{ICD} \Rightarrow$ tam giác DCI cân tại D .	
Do tam giác DBI và DCI cân tại D nên $DB = DI, DC = DI \Rightarrow DB = DC = DI \Rightarrow D$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC .	0,25

b) (1,0 điểm). Chứng minh $ID.IE = IF.DE$.

Nội dung	Điểm
Theo kết quả phần a ta có tam giác DIC cân tại D nên $CD = DI$ Do OD là trung trực của BC suy ra F là trung điểm của BC . Do DE là đường kính của đường tròn (O) suy ra $\widehat{BCE} = 90^\circ$.	0,25
Kết hợp với CF là đường cao của tam giác DCE nên $CD^2 = DF.DE = DI^2 \Rightarrow \frac{DI}{DF} = \frac{DE}{DI}$.	0,25
Xét hai tam giác DIF và DEI có: $\frac{DI}{DF} = \frac{DE}{DI}$ và $\widehat{IDF} = \widehat{EDI}$ suy ra tam giác DIF đồng dạng với tam giác DEI	0,25
Suy ra $\frac{IF}{IE} = \frac{ID}{DE} \Leftrightarrow ID.IE = IF.DE$.	0,25

c) (1,0 điểm) Gọi các điểm M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên các cạnh AB, AC . Gọi H, K lần lượt là các điểm đối xứng với M, N qua I . Biết rằng $AB + AC = 3.BC$, chứng minh $\widehat{KBI} = \widehat{HCI}$.

Nội dung	Điểm
Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác $ABDC$ ta được: $AB.DC + AC.DB = AD.BC \Leftrightarrow (AB + AC).DB = AD.BC$ $\Leftrightarrow 3.BC.ID = AD.BC \Leftrightarrow 3.ID = AD \Leftrightarrow IA = 2.ID$	0,25
Gọi P là trung điểm của đoạn thẳng AI , suy ra $MP = AP = PI = ID = \frac{1}{2} AI \Rightarrow I$ là trung điểm của PD . Mặt khác I là trung điểm HM suy ra tứ giác $MPHD$ là hình bình hành $\Rightarrow MP = DH$. Từ đó suy ra $DH = MP = DI$ (5).	0,25
Chứng minh tương tự ta được $DK = DI$ (6). Mặt khác theo kết quả phần a ta được $DB = DC = DI$ (7). Từ (5), (6), (7) ta được $DB = DC = DH = DK = DI$ suy ra B, C, H, K, I cùng thuộc đường tròn tâm D .	0,25
Do B, C, H, K, I cùng thuộc đường tròn tâm D nên $\widehat{KBI} = \frac{1}{2} sđ \widehat{IK}$, $\widehat{HCI} = \frac{1}{2} sđ \widehat{IH}$. Do $IK = IH \Rightarrow \widehat{IK} = \widehat{IH} \Rightarrow sđ \widehat{IK} = sđ \widehat{IH}$. Từ đó suy ra $\widehat{KBI} = \widehat{HCI}$.	0,25

Câu 5 (0,5 điểm). Thầy Du viết số 2020^{2021} thành tổng của một vài số nguyên dương rồi đem cộng tất cả các chữ số của các số nguyên dương này với nhau. Hỏi thầy Du có thể nhận được kết quả là số 2021 hoặc 2022 được không? Tại sao?

Nội dung	Điểm
Nhận xét. Cho số nguyên dương m , kí hiệu $S(m)$ là tổng các chữ số của m . Khi đó $S(m) \equiv m \pmod{9}$. Chứng minh. Giả sử $m = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ $\equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{9} \Rightarrow S(m) \equiv m \pmod{9}$.	0,25

Ta có $2020 \equiv 4 \pmod{9} \Rightarrow 2020^{2021} \equiv 4^{2021} \pmod{9} \equiv 4^{3 \cdot 673 + 2} \pmod{9}$ Do $4^3 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 2020^{2021} \equiv 4^2 \pmod{9} \equiv 7 \pmod{9}$ Mặt khác $2021 \equiv 5 \pmod{9}, 2022 \equiv 6 \pmod{9}$ Từ đó suy ra $2020^{2021} \not\equiv 2021 \pmod{9}, 2020^{2021} \not\equiv 2022 \pmod{9}$. Do đó thầy Du không nhận được kết quả là 2021 và 2022.	0,25
---	------

-----**HẾT**-----