

**Câu 1. (2,0 điểm)**

a) Tính giá trị biểu thức  $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ .

b) Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right) : \left( 1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \right)$  với  $x \geq 0; x \neq 1$  Rút gọn biểu thức  $P$ .

**Câu 2. (1,0 điểm)**

Tìm tất cả các giá trị  $m$  của đề phương trình  $x^2 - 5x + 3m + 1 = 0$  ( $x$  là ẩn số;  $m$  là tham số) có hai nghiệm phân biệt  $x_1; x_2$  thỏa mãn  $|x_1^2 - x_2^2| = 15$ .

**Câu 3. (1,5 điểm)**

a) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6} \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

b) Giải phương trình  $(x-1)^4 = x^2 - 2x + 3$ .

**Câu 4. (1,5 điểm)**

a) Tìm tất cả các số nguyên  $x$  sao cho giá trị của biểu thức  $x^2 + x + 6$  là một số chính phương.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình  $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$ .

**Câu 5. (3,0 điểm)**

Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Kẻ đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$  ( $H$  thuộc  $BC$ ). Gọi  $P; Q$  lần lượt là chân của đường vuông góc kẻ từ  $H$  đến các cạnh  $AB, AC$ .

a) Chứng minh  $PQH = BAH$ .

b) Hai đường thẳng  $PQ$  và  $BC$  cắt nhau tại  $M$ . Chứng minh  $\Delta MQH \sim \Delta MHP$  và  $MH^2 = MB \cdot MC$ .

c) Đường thẳng  $MA$  và cắt đường tròn  $(O)$  tại  $K$  ( $K$  khác  $A$ ).  $KH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D$  ( $D$  khác  $K$ ). Gọi  $J$  là trung điểm của  $HD$ . Chứng minh  $JQ = JC$ .

**Câu 6. (1,0 điểm)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $\frac{x^2 + 10}{\sqrt{x^2 + 9}}$ .

----- Hết -----

## HƯỚNG DẪN GIẢI

### Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức  $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ .

b) Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right) : \left( 1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \right)$  với  $x \geq 0; x \neq 1$  Rút gọn biểu thức  $P$ .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} \\ &= \sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P &= \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right) : \left( 1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \right) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \right) : \left( \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+1} \right) \\ &= \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} : \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{x+1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

### Câu 2. (1,0 điểm)

Tìm tất cả các giá trị  $m$  của đề phương trình  $x^2 - 5x + 3m + 1 = 0$  ( $x$  là ẩn số;  $m$  là tham số) có hai nghiệm phân biệt  $x_1; x_2$  thỏa mãn  $|x_1^2 - x_2^2| = 15$ .

Lời giải

$$\text{Có } \Delta = 21 - 12m$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt } \Delta > 0 \Leftrightarrow 21 - 12m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{7}{4}$$

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 3m + 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } |x_1^2 - x_2^2| = 15 \Leftrightarrow |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| = 15 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 3$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 5^2 - 4(3m+1) = 9 \Leftrightarrow 21 - 12m = 9$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } m = 1$$

### Câu 3. (1,5 điểm)

a) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6} \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

b) Giải phương trình  $(x-1)^4 = x^2 - 2x + 3$ .

**Lời giải**

a) ĐK  $x \neq 0; y \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6} \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{5}{6} \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ x^2 - \frac{36}{x^2} = 5 \end{cases}$$

$$x^2 - \frac{36}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 2$$

$$x = -3 \Rightarrow y = -2$$

Vậy nghiệm của phương trình  $S = \{(3; 2), (-3; -2)\}$

b)  $(x-1)^4 = x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow (x-1)^4 = (x-1)^2 + 2 \Leftrightarrow (x-1)^4 - (x-1)^2 - 2 = 0$ .

Đặt  $t = (x-1)^2 (t \geq 0)$

Phương trình trở thành  $t^2 - t - 2 = 0$

$\Rightarrow t = -1$  (loại);  $t = 2$  (nhận)

Với  $t = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} + 1 \\ x_2 = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình  $S = \{-\sqrt{2} + 1; \sqrt{2} + 1\}$

#### **Câu 4. (1,5 điểm)**

a) Tìm tất cả các số nguyên  $x$  sao cho giá trị của biểu thức  $x^2 + x + 6$  là một số chính phương.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình  $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$ .

**Lời giải**

a) Giải sử  $x^2 + x + 6$  là số chính phương, suy ra tồn tại số  $k \in \mathbb{Z}$  sao cho

$$x^2 + x + 6 = k^2 \Leftrightarrow 4(x^2 + x + 6) = 4k^2$$

$$\Leftrightarrow (2k)^2 - (2x+1)^2 = 23 \Leftrightarrow (2k+2x+1)(2k-2x-1) = 23$$

TH1:  $\begin{cases} 2k+2x+1 = 23 \\ 2k-2x-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$

TH2:  $\begin{cases} 2k+2x+1 = 1 \\ 2k-2x-1 = 23 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6$

TH3:  $\begin{cases} 2k+2x+1 = -23 \\ 2k-2x-1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2k+2x+1=-1 \\ 2k-2x-1=-23 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

Với  $x \in \{-6; 5\}$  thì  $x^2 + x + 6$  là số chính phương

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình  $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$ .

trình  $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$ .

$$y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32) \Leftrightarrow y^2 - 2x^3y + 2x^6 - 64 = 0$$

$$\Delta' = -x^6 + 64 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2$$

$$\Rightarrow x = \pm 1; 0; \pm 2$$

Vóri  $x = 0 \Leftrightarrow y = \pm 8$

Với  $x = 1 \Rightarrow y^2 - 2y - 62 = 0$ . (loại)

Với  $x = -1 \Rightarrow y^2 + 2y - 62 = 0$ . (loại)

Vóí  $x = 2 \Rightarrow y^2 - 16y + 64 = 0 \Leftrightarrow y = 8$

Vóri  $x = -2 \Rightarrow y^2 + 16y + 64 = 0 \Leftrightarrow y = -8$ .

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là  $(0;8); (0;-8); (2;8); (-2;-8)$ .

**Câu 5. (3,0 điểm)**

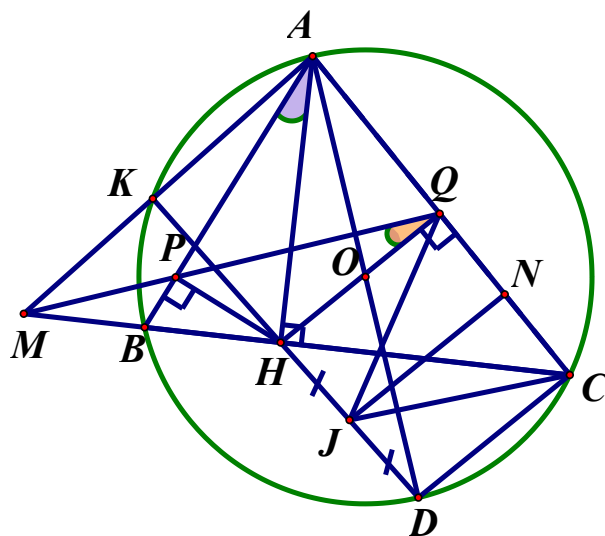
Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Kẻ đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$  ( $H$  thuộc  $BC$ ). Gọi  $P; Q$  lần lượt là chân của đường vuông góc kẻ từ  $H$  đến các cạnh  $AB, AC$ .

a) Chứng minh  $PQH = BAH$ .

b) Hai đường thẳng  $PQ$  và  $BC$  cắt nhau tại  $M$ . Chứng minh  $\Delta MQH \sim \Delta MHP$  và  $MH^2 = MB.MC$ .

c) Đường thẳng  $MA$  và cắt đường tròn  $(O)$  tại  $K$  ( $K$  khác  $A$ ).  $KH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D$  ( $D$  khác  $K$ ). Gọi  $J$  là trung điểm của  $HD$ . Chứng minh  $JQ = JC$ .

### Lời giải



a) Tứ giác  $APHQ$  có  $APH + AQH = 180^\circ$

Suy ra tứ giác  $APHQ$  nội tiếp

$$\Rightarrow PQH = PAH$$

Hay  $PQH = BAH$ .

b) có  $PQH = BAH$  (cmt)

mà  $BAH = MHP$  ( cùng phụ  $PBH$  )

nên  $MQH = MHP$

và  $PMH$  góc chung

$$\Rightarrow \Delta MQH \sim \Delta MHP (g.g) \Rightarrow \frac{MQ}{MH} = \frac{MH}{MP} \Rightarrow MH^2 = MP.MQ \quad (1)$$

Chứng minh được tứ giác  $BPQC$  nội tiếp  $\Rightarrow MBP = MQC$

và  $BMP$  góc chung

$$\Rightarrow \Delta MBP \sim \Delta MQC (g.g) \Rightarrow \frac{MB}{MQ} = \frac{MP}{MC} \Rightarrow MP.MQ = MB.MC \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow MH^2 = MB.MC$

c) vì  $AKBC$  là tứ giác nội tiếp

nên  $MKB = MCA$  (cùng bù với  $AKB$ ), mà  $AMC$  là góc chung

$$\Rightarrow \Delta MKB \sim \Delta MCA (g.g) \Rightarrow \frac{MK}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MK.MA = MB.MC$$

Mà  $MH^2 = MB.MC \Rightarrow MH^2 = MK.MA$

Do  $\Delta AHM$  vuông tại  $H \Rightarrow HK$  là đường cao của  $\Delta AHM$  (vì  $\Delta MHA \sim \Delta MKH$ )

$\Rightarrow AK \perp KH \Rightarrow AK \perp KD \Rightarrow AD$  là đường kính của  $(O)$

Suy  $ACD = 90^\circ$  nên  $DC \perp AC$

Mà  $HQ \perp AC \Rightarrow DC \parallel HQ$  nên  $HQCD$  là hình thang

Gọi  $N$  là trung điểm  $QC$  (3)  $\Rightarrow JN$  của là đường trung bình của hình thang  $HQCD$

$\Rightarrow JN \parallel HQ \Rightarrow JN \perp QC$  (4)

Từ (3) và (4)  $\Rightarrow JN$  là đường trung trực của  $QC \Rightarrow JQ = JC$

#### Câu 6. (1,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $\frac{x^2 + 10}{\sqrt{x^2 + 9}}$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } P = \frac{x^2 + 10}{\sqrt{x^2 + 9}} = \sqrt{x^2 + 9} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$= \left( \frac{1}{9} \sqrt{x^2 + 9} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} \right) + \frac{8}{9} \sqrt{x^2 + 9}$$

$$\Rightarrow p \geq 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{9} \cdot 3 = \frac{10}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $p = \frac{10}{3}$  khi  $x = 0$

----- Hết -----