

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Cho số thực $x > 1$. Rút gọn biểu thức $P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x}}$

b) Cho hai số thực $a, b > 1$. Chứng minh rằng $\frac{a^2 - 2a + 3}{b - 1} + \frac{b^2 - 2b + 3}{b - 1} \geq 4\sqrt{2}$

Câu 2. (5,0 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 6.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy - x + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9 = (x^2 + 4x + 5)(y^2 - 2y + 3) \end{cases}$

Câu 3. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn có $CA = CB$. Lấy điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Trên tia đối của tia BA lấy điểm P (P khác B). Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD với đường thẳng PD (Q khác D), R là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ với đường thẳng PC (R khác P), X là giao điểm của đường thẳng AQ và CD . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ARC} = \widehat{ACD}$.

b) Bốn điểm C, Q, R, X cùng thuộc một đường tròn.

c) Ba điểm B, R, X thẳng hàng.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho số nguyên a thỏa mãn $a^{25} - 1$ chia hết cho 43. Chứng minh rằng $A = a^{86} - a^{52}$ và $B = a - 1$ cùng chia hết cho 43.

Câu 5. (2,0 điểm) Cho một bảng 6×6 vuông như hình vẽ.

a) Khi ta tô đen 19 ô tùy ý của bảng.

Chứng minh rằng có một hàng chứa ít nhất 3 ô đen.

b) Khi ta tô đen 9 ô tùy ý của bảng.

Chứng minh rằng có thể chọn ra 3 hàng và 3 ba cột chứa tất cả 9 ô đen này.

-----Hết-----

HƯỚNG DẪN CHẤM
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2024-2025
Môn thi: TOÁN

Câu 1. a) Cho số thực $x > 1$. Rút gọn biểu thức $P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x}}$

b) Cho hai số thực $a, b > 1$. Chứng minh rằng $\frac{a^2 - 2a + 3}{b - 1} + \frac{b^2 - 2b + 3}{a - 1} \geq 4\sqrt{2}$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) Với } x > 1, \text{ ta có: } P &= \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x}} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

b) Đặt:

$$A = \frac{a^2 - 2a + 3}{b - 1} + \frac{b^2 - 2b + 3}{a - 1} = \frac{(a - 1)^2 + 2}{b - 1} + \frac{(b - 1)^2 + 2}{a - 1} = \frac{(a - 1)^2}{b - 1} + \frac{2}{b - 1} + \frac{(b - 1)^2}{a - 1} + \frac{2}{a - 1}$$

Vì $a, b > 1 \Rightarrow a - 1 > 0; b - 1 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{(a - 1)^2}{b - 1} + \frac{2}{b - 1} + \frac{(b - 1)^2}{a - 1} + \frac{2}{a - 1} \geq 4 \sqrt[4]{\frac{(a - 1)^2}{b - 1} \cdot \frac{2}{b - 1} \cdot \frac{(b - 1)^2}{a - 1} \cdot \frac{2}{a - 1}} = 4\sqrt[4]{4} = 2\sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \sqrt{2} + 1$

Câu 2. a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 6.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy - x + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9 = (x^2 + 4x + 5)(y^2 - 2y + 3) \end{cases}$$

Lời giải:

a) Phương trình: $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m = 0$ (1)

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$\Delta = (2m-3)^2 - 4(m^2 - 3m) > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 12m = 9 > 0; \forall m$$

Với $\Delta = 9$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{2m-3+3}{2} = m; x_2 = \frac{2m-3-3}{2} = m-3$$

Do có phương trình có 2 nghiệm nhỏ hơn 6 nên ta có:

$$\begin{cases} x_1 < 6 \\ x_2 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m-3 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow m < 6$$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} xy - x + 2y - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9 = (x^2 + 4x + 5)(y^2 - 2y + 3) & (2) \end{cases}$$

Đặt $a = x+2$ và $b = y-1$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) ta có: } xy - x + 2y - 3 = 0 &\Leftrightarrow x(y-1) + 2(y-1) = 1 \Leftrightarrow (x+2)(y-1) = 1 \\ &\Leftrightarrow ab = 1 \end{aligned}$$

Mặt khác, Từ (2) ta cũng có:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9 &= (x^2 + 4x + 5)(y^2 - 2y + 3) \\ \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) + 4 &= [(x^2 + 4x + 4) + 1][(y^2 - 2y + 1) + 2] \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + 4 &= [(x+2)^2 + 1][(y-1)^2 + 2] \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4 &= (a^2 + 1)(b^2 + 2) \\ \Leftrightarrow a^2b^2 + 2a^2 + b^2 + 2 - a^2 - b^2 - 4 &= 0 \Leftrightarrow a^2b^2 + a^2 - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow 1 + a^2 - 2 &= 0 \text{ (do } (ab)^2 = 1) \\ \Leftrightarrow a^2 = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$+ \text{ Với } a = 1 \text{ và } b = 1 \text{ thì: } \begin{cases} x+2 = 1 \\ y-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

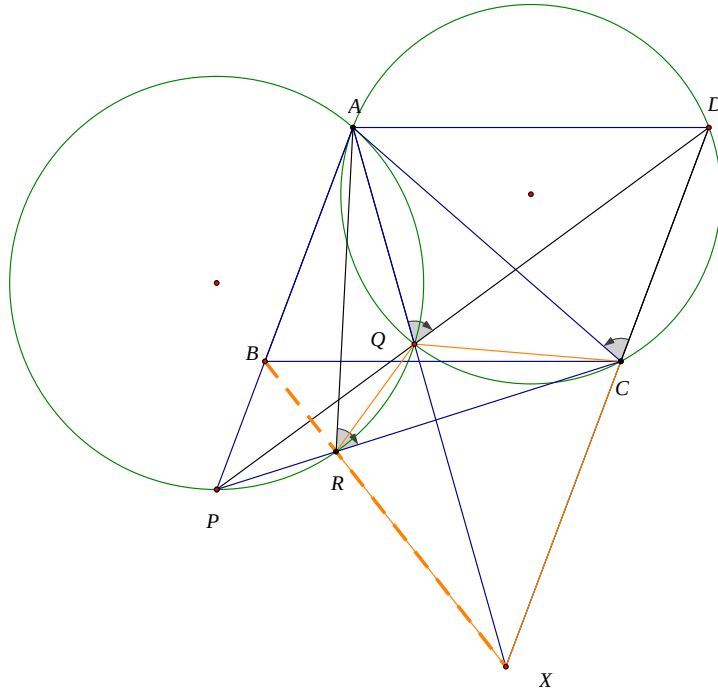
$$+ \text{ Với } a = -1 \text{ và } b = -1 \text{ thì: } \begin{cases} x+2 = -1 \\ y-1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm $(x; y) \in \{(-1; 2); (-3; 0)\}$.

Câu 3. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn có $CA = CB$. Lấy điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Trên tia đối của tia BA lấy điểm P (P khác B). Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD với đường thẳng PD (Q khác D), R là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ với đường thẳng PC (R khác P), X là giao điểm của đường thẳng AQ và CD . Chứng minh rằng:

- d) $ARC = ACD$.
 e) Bốn điểm C, Q, R, X cùng thuộc một đường tròn.
 f) Ba điểm B, R, X thẳng hàng.

Lời giải



a) **Chứng minh rằng:** $ARC = ACD$.

+ Tứ giác $AQCD$ nội tiếp nên $ACD = ACD$ (cùng chắn AD)

lại có tứ giác $AQRP$ nội tiếp nên $AQP = ARP$

Có $AQP + ACD = 180^\circ$

$$ARP + ARC = 180^\circ$$

Suy ra $AQP = ARC = ACD$

b) **Chứng minh bốn điểm** C, Q, R, X **cùng thuộc một đường tròn.**

Tứ giác $APRQ$ nội tiếp nên $APR = RQX$ (hai góc cùng bù AQR)

mà $APR = PCX$ (hai góc so le trong do $CX \parallel AP$).

Suy ra $RQX = PCX$ nên tứ giác $CQRX$ nội tiếp được một đường tròn.

c) **Chứng minh ba điểm** B, R, X **thẳng hàng.**

Theo ý a) $ARC = ACD$. Mà $ACD = CAB$ (hai góc so le trong)

$$CAB = ABC \text{ (} \triangle ABC \text{ cân tại } C \text{)}$$

Suy ra $ARC = ABC$, suy ra tứ giác $ABRC$ nội tiếp được một đường tròn.

$$\Rightarrow BRC + BAC = 180^\circ$$

Mặt khác:

+ Tứ giác $CQRX$ là tứ giác nội tiếp nên $CRX = CQX$ (1)

+ Tứ giác $AQCD$ là tứ giác nội tiếp nên $CQX = ADC$ (2)

+ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $ADC = ABC$ (3)

+ $\triangle ABC$ cân tại C nên $ABC = BAC$ (4)

Từ (1); (2); (3) và (4) suy ra $CRX = BAC$

Từ đó suy ra $BRC + CRX = BRC + BAC = 180^\circ$. **Suy ra ba điểm B, R, X thẳng hàng.**

Câu 4. Cho số nguyên a thoả mãn $a^{25} - 1$ chia hết cho 43. Chứng minh rằng $A = a^{86} - a^{52}$ và $B = a - 1$ cùng chia hết cho 43.

Lời giải:

Từ giả thiết $a^{25} - 1$ chia hết cho 43 nên $a^{25} \equiv 1 \pmod{43}$, suy ra $a^{52} = a^{25 \cdot 2 + 2} \equiv a^2 \pmod{43}$

Theo định lý Fermat thì $a^{43} \equiv a \pmod{43}$ suy ra $a^{86} \equiv a^2 \pmod{43}$

Do đó: $A = a^{86} - a^{52} \equiv 0 \pmod{43}$ nên $A \vdots 43$

Ta lại có: $42 \cdot 3 = 1 + 25 \cdot 5$ (1)

từ giả thiết $a^{25} \equiv 1 \pmod{43}$, suy ra $a^{25 \cdot 5} \equiv 1 \pmod{43}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a \equiv a^{1+25 \cdot 5} = a^{42 \cdot 3} \pmod{43}$ (3)

Từ (3) suy ra a không chia hết cho 43

Theo định lý Fermat thì $a^{42} \equiv 1 \pmod{43}$ (4)

Từ (4) suy ra $a^{42 \cdot 3} \equiv 1 \pmod{43}$ (5)

Suy ra $a \equiv a^{42 \cdot 3} \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow B = a - 1 \equiv 0 \pmod{43}$

Câu 5. Cho một bảng 6×6 vuông như hình vẽ.

c) Khi ta tô đen 19 ô tùy ý của bảng.

Chứng minh rằng có một hàng chứa ít nhất 3 ô đen.

d) Khi ta tô đen 9 ô tùy ý của bảng.

Chứng minh rằng có thể chọn ra 3 hàng và 3 ba cột chứa tất cả 9 ô đen này.

a) Vì có $19 = 6 \cdot 3 + 1$ ô đen và bảng có 6 hàng nên theo nguyên lý Dirichlet có một hàng chứa ít nhất $3 + 1 = 4$ ô đen.

Khi đó 5 hàng còn lại chứa ít nhất $13 = 5 \cdot 2 + 3$ ô đen nên theo nguyên lý Dirichlet có 1 hàng chứa ít nhất $2 + 1 = 3$ ô đen.

b) Giả sử 3 hàng còn lại chứa ít nhất 7 ô đen nên theo nguyên lý Dirichlet có một hàng trong 3 hàng này chứa ít nhất 3 ô đen. Suy ra, mỗi hàng trong 3 hàng xoá

đi có số ô đen ít nhất là 3. Do đó tổng số ô đen trong bảng ban đầu ít nhất là $3+3+3+7=16$, mâu thuẫn.

Vậy trong 3 hàng còn lại có nhiều nhất là 6 ô đen.

-----Hết-----