

SỐ BÁO DANH:.....

Câu 1 (2,0 điểm).

a. Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{11+x}{7-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x+2}+1}{x-3\sqrt{x+2}+2} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right)$ (với $x > -2, x \neq 7$)

b. Giải phương trình $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$

Câu 2 (2,0 điểm).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng (d): $y = ax + b$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $A(1;4)$ và cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại B và C (khác O)

a. Viết phương trình đường thẳng (d) sao cho biểu thức $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất

b. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{OB \cdot OC}{BC}$

Câu 3 (3,0 điểm).

Trong mặt phẳng, cho hai điểm B, C cố định với $BC=2a$ ($a>0$) và A thay đổi sao cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi M là trung điểm của BC , đường thẳng đi qua A vuông góc với AM cắt các đường phân giác của các góc $\widehat{AMB}, \widehat{AMC}$ lần lượt tại P, Q . Gọi D là giao điểm của MP với AB và E là giao điểm của MQ với AC .

a. Giả sử $AC=2AB$, tính số đo góc $\widehat{BQC}$

b. Chứng minh rằng $\frac{PD}{QE} = \left(\frac{MP}{MQ} \right)^3$

c. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACQ và ABP theo a

Câu 4 (1,0 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$

Chứng minh rằng $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{b+c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{c+a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} \leq 4 \left(\frac{(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{b}-1)}{\sqrt{c}} + \frac{(\sqrt{c}-1)}{\sqrt{a}} \right)$

Câu 5 (2,0 điểm).

a. Số nguyên dương n được gọi là số điều hòa nếu tổng các bình phương của các ước dương của nó (kể cả 1 và n) bằng $(n+3)^2$. Chứng minh rằng nếu pq (với p, q là các số nguyên tố khác nhau) là số điều hòa thì $pq+2$ là số chính phương.

b. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x^3 + y^3 = x^2 + y^2 + 42xy$

-----HẾT-----

Câu 1.

a. Đặt $\sqrt{x+2} = t$ ($t > 0, t \neq 3$) $\Rightarrow x = t^2 - 2$

Khi đó: $A = \left(\frac{t}{t+3} + \frac{t^2+9}{9-t^2} \right) : \left(\frac{3t+1}{t^2-3t} - \frac{1}{t} \right) = \left[\frac{t(3-t)+t^2+9}{9-t^2} \right] : \left(\frac{3t+1-t+3}{t^2-3t} \right)$
 $= \frac{-3t}{2(t+2)}$

Vậy $A = \frac{-3\sqrt{x+2}}{2(\sqrt{x+2}+2)}$

b. Điều kiện $x \geq 4$

Ta có: $\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}\sqrt{x-4} = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-4+4}\sqrt{x-4} + 4 + \sqrt{x-4-4}\sqrt{x-4} + 4 = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} = 4$

$\Leftrightarrow |\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2| = 4$

Nhận xét: $|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2| \geq |\sqrt{x-4}+2 - \sqrt{x-4}+2| = 4$

Đẳng thức xảy ra khi: $(\sqrt{x-4}+2)(2-\sqrt{x-4}) \geq 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x-4} \geq 0$ (Do $\sqrt{x-4}+2 > 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-4} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 8$

Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $4 \leq x \leq 8$

Câu 2.

a) Do (d) đi qua A nên $a+b=4 \Rightarrow (d): y = ax+4-a$

Ta có: $B\left(\frac{a-4}{a}; 0\right), C(0; 4-a)$ theo bài ra thì $\begin{cases} \frac{a-4}{a} > 0 \\ 4-a > 0 \end{cases} \Rightarrow a < 0$

$OB = \frac{a-4}{a}, OC = 4-a$

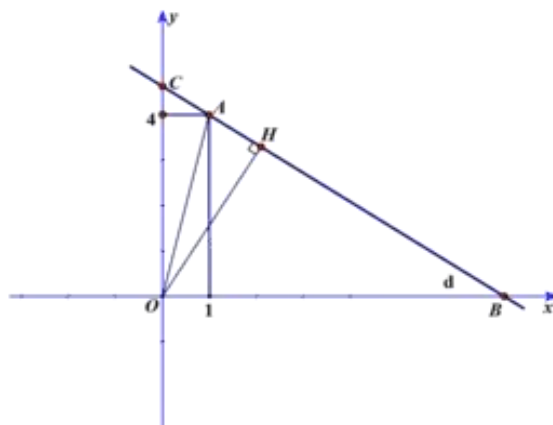
Ta có $OA+OB+OC$ nhỏ nhất khi $OB+OC$ nhỏ nhất (Vì OA không đổi)

$OB + OC = \frac{a-4}{a} + 4-a = 5 + \frac{-4}{a} + (-a) \geq 5 + 2\sqrt{\frac{-4}{a}} \cdot (-a) \geq 9$

$OA+OB+OC$ nhỏ nhất bằng $9 + \sqrt{17}$ khi và chỉ khi $-a = \frac{-4}{a} \Leftrightarrow a = -2$ (Do $a < 0$)

Vậy phương trình đường thẳng (d) là: $y = -2x + 6$

b)



Theo câu a), với $a < 0$ đường thẳng (d) cắt tia Ox , Oy lần lượt tại B, C (khác O) và đi qua điểm A(1;4)

$$\Rightarrow OA = \sqrt{17}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng (d) , ta có:

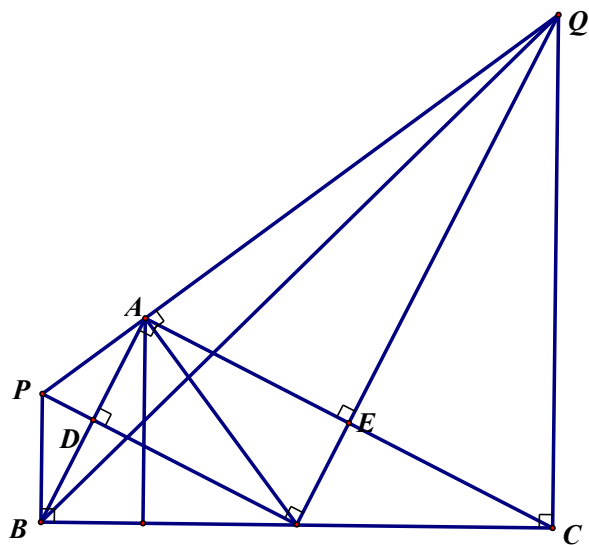
$$\frac{BC^2}{OB^2 \cdot OC^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2} \geq \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow P = \frac{OB \cdot OC}{BC} \leq \sqrt{17}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv A$ hay $d \perp OA$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\sqrt{17}$

Câu 3:



a) Ta có: $MA=MC$ và ME là phân giác của góc $\widehat{AMC}$ nên ME là đường trung trực của đoạn AC

$$\Rightarrow OA = OC, \widehat{OEC} = 90^\circ$$

Vì MO là đường trung trực của đoạn AC và $AM \perp AO$ nên $MC \perp OC$

Xét hai tam giác vuông ABC và ECQ có: $\widehat{ACB} = \widehat{EQC}$ (cùng phụ góc $\widehat{QCE}$) và $AB=EC$ (Vì $2EC=AC=2AB$)

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ECQ \Rightarrow CQ = CB$ hay tam giác BCQ vuông cân tại C, do đó $\widehat{BQC} = 45^\circ$

b) Ta có MP, MQ là các đường phân giác của các góc $\widehat{AMB}, \widehat{AMC}$ nên $MP \perp MQ$
 Tương tự chứng minh câu a ta được $AD \perp MP, AE \perp MQ$
 Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông, ta có: $PD \cdot PM = PA^2, QE \cdot QM = QA^2$

$$\text{Suy ra } \frac{PD}{QE} = \frac{QM \cdot PA^2}{PM \cdot QA^2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } PA \cdot PQ = PM^2, QA \cdot QP = QM^2 \Rightarrow \frac{PA}{QA} = \frac{PM^2}{QM^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta được: } \frac{PD}{QE} = \left(\frac{MP}{MQ} \right)^3 \quad (\text{đpcm})$$

c) Vì MQ là trung trực của đoạn AC và MP là trung trực của đoạn AB suy ra:
 $CQ=QA, BP=AP$ và $BCQP$ là hình thang vuông

$$\text{Do đó: } S_{BCQP} = \frac{(BP+CQ) \cdot BC}{2} = \frac{PQ \cdot BC}{2} \geq \frac{BC^2}{2} = 2a^2 \quad (*)$$

$$\text{Kẻ } AH \text{ vuông góc } BC \text{ thì } S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} \leq \frac{AM \cdot BC}{2} = a^2 \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**) suy ra: } S_{ABP} + S_{ACQ} = S_{BCQP} - S_{ABC} \geq 2a^2 - a^2 = a^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv M$, khi đó tam giác ABC vuông cân tại A
 Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACQ và ABP là a^2

Câu 4:

$$\text{Ta có: } \frac{b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{c}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{a}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} \quad (1)$$

$$\text{Thật vậy, xét: } \frac{b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{c}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{a}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{c}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} \\ = \sqrt{b} - \sqrt{a} + \sqrt{c} - \sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{c} = 0$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau: Với x, y là các số thực và a, b là các số dương ta có:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \quad (*)$$

$$\text{Thật vậy: } * \Leftrightarrow (a+b)(bx^2 + ay^2) \geq ab(x+y)^2 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0 \quad (\text{BĐT đúng})$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{b}-1)^2}{\sqrt{c}} + \frac{(\sqrt{c}-1)^2}{\sqrt{a}} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 2)^2}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c} - 2)^2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{c} + \sqrt{a} - 2)^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{b}-1)^2}{\sqrt{c}} + \frac{(\sqrt{c}-1)^2}{\sqrt{a}} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{a}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} + \frac{b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{b}-1)^2}{\sqrt{c}} + \frac{(\sqrt{c}-1)^2}{\sqrt{a}} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{b+c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{c+a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} + \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{b+c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{c+a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} \leq 4 \left(\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{b}-1)^2}{\sqrt{c}} + \frac{(\sqrt{c}-1)^2}{\sqrt{a}} \right)$$

Câu 5:

a) Ta có pq có các ước dương là 1, p, q, pq

Vì pq là số điều hòa nên ta có $1 + p^2 + q^2 + (pq)^2 = (pq+3)^2$

$$\Leftrightarrow p^2 + q^2 = 6pq + 8 \Leftrightarrow (p-q)^2 = 4(pq+2)$$

Vì 4 là số chính phương nên từ đẳng thức trên suy ra $pq+2$ cũng là số chính phương (đpcm)

b) Gọi $d=(x,y)$ là ước chung lớn nhất của x và y

Suy ra: $x=da, y=db$ với $d, a, b \in \mathbb{N}^*, (a,b)=1$

Ta có:

$$x^3 + y^3 = x^2 + y^2 + 42xy$$

$$\Leftrightarrow d^3(a^3 + b^3) = d^2(a^2 + b^2 + 42ab)$$

$$\Leftrightarrow d(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 + b^2 + 42ab$$

$$\Leftrightarrow (da + db - 1)(a^2 - ab + b^2) = 43ab$$

Đặt $c=da+db-1, (c \in \mathbb{N})$

Ta viết lại: $a^2c - abc + b^2c = 43ab$

Từ đó suy ra $(ab) \mid ca^2$ và $a \mid cb^2 \Rightarrow b \mid c$ và $a \mid c$

Do đó: $(ab) \mid c \Leftrightarrow c = mab, m \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow m(a^2 - ab + b^2) = 43 \Rightarrow (a^2 - ab + b^2) \mid 43$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - ab + b^2 = 1 \\ a^2 - ab + b^2 = 43 \end{cases}$$

TH1: $a^2 - ab + b^2 = 1$, khi đó $1 - ab = (a-b)^2 \geq 0$

Suy ra $a = b = 1 \Rightarrow d = 22$. Do vậy $(x, y) = (22, 22)$

TH2: $a^2 - ab + b^2 = 43$

Do tính đối xứng của x, y. Giả sử $x \geq y \Rightarrow a \geq b$

$$\text{Do đó } 43 = a^2 - ab + b^2 \geq ab \geq b^2 \Rightarrow b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Thay $b=1$ thì $a=7$ và $d=1$ suy ra $(x,y)=(1,7),(7,1)$

Thay $b=2,3,4,5$ thì không tồn tại số nguyên dương a thỏa mãn

Thay $b=6$ thì $a=7$ và $d=43/13$ (không thỏa mãn)

Thử lại, ta có các cặp giá trị cần tìm là $(x,y)=(22,22),(1,7),(7,1)$