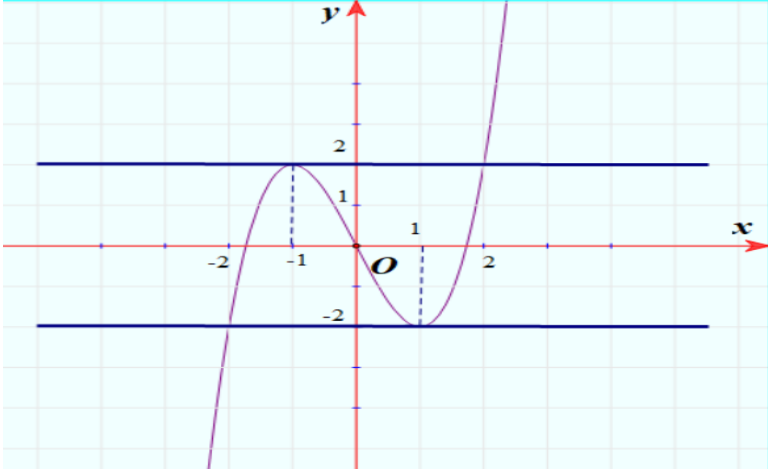


ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài 1. (4 điểm) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Chứng minh rằng nếu $x > y$ thì $f(x) - f(y) \geq -4$

Hướng dẫn giải

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
Bài 1. (4 điểm)	Khảo sát đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x$  Ta thấy $f(x) = x^3 - 3x$ đạt cực đại bằng 2 khi $x = -1$ và đạt cực tiểu bằng -2 khi $x = 1$.	1,5 điểm
	➤ Nếu $y \leq -1$ thì $f(y) \leq 2$. Ta có 2 trường hợp: - Nếu $x \leq -1$ thì do $f(x)$ tăng trên $(-\infty; -1)$ nên ta có $f(x) - f(y) > 0 > -4$. - Nếu $x > -1$ thì $f(x) \geq -2$ do đó $f(x) - f(y) \geq -4$. ➤ Nếu $y > -1$ thì $x > -1$ và ta có $f(x) \geq -2$. Ta lại xét 2 trường hợp: - Nếu $y \leq 1$ thì $f(y) \leq 2$ và ta có $f(x) - f(y) \geq -4$. - Nếu $y > 1$ thì do hàm số $f(x)$ tăng trên $(1; +\infty)$, ta có $f(x) - f(y) > 0 > -4$.	1,0 điểm 1,0 điểm
	Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $f(x) - f(y) \geq -4$ (đpcm)	0,5 điểm

Bài 2.1. (3.0 điểm) Giải phương trình $\sqrt[3]{81x-8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$.

Hướng dẫn giải

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
Bài 2.1 (3 điểm)	Ta đưa phương trình về phương trình: $27\sqrt[3]{81x-8} = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 54$ $\Leftrightarrow 27\sqrt[3]{81x-8} = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 - 46$ $\Leftrightarrow 27\sqrt[3]{81x-8} = (3x-2)^3 - 46 \Leftrightarrow 27\sqrt[3]{27(3x-2)+46} = (3x-2)^3 - 46 \quad (1)$	0.5 điểm 0.5 điểm
	Đặt: $a = 3x - 2$; $b = \sqrt[3]{27(3x-2)+46} = \sqrt[3]{27a+46}$. Khi đó kết hợp với phương trình (1) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 27b = a^3 - 46 \\ b^3 = 27a + 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 27b = 46 \\ b^3 - 27a = 46 \end{cases} \quad (*)$	0.5 điểm
	Hệ phương trình (*) là hệ đối xứng loại 2, nên ta được: $\begin{cases} a = b \quad (2) \\ a^2 + ab + b^2 + 27 = 0 \quad (3) \end{cases}$	0.5 điểm
	Phương trình (3) vô nghiệm	0.5 điểm
	Từ phương trình (2) ta có: $3x - 2 = \sqrt[3]{27(3x-2)+46}$ $\Leftrightarrow (3x-2)^3 = 27(3x-2) + 46$ $\Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 - 45x = 0$ Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x = 0$; $x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$.	0.5 điểm

Bài 2.2. (3.0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1} + y = 4 + \sqrt{x+4} \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
Bài 2.2 (3. điểm)	Điều kiện: $-4 \leq x \leq 1$; $y \in \mathbb{R}$. Ta có phương trình đầu tương đương $2y^3 + y = 2\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$ $\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$	0.5 điểm 0.5 điểm
	Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$, Ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy phương trình đầu $\Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1-x \end{cases}$	0.5 điểm 0.5 điểm
	Thế vào phương trình thứ hai ta được $\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x+4} \quad (*)$ Xét hàm số $g(x) = \sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{x+4}$, liên tục trên $[-4;1]$, Ta có $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+4}} < 0 \quad \forall x \in (-4;1) \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-4;1]$.	0.5 điểm

	Lại có $g(-3)=4$ nên $x=-3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*). Với $x=-3$ suy ra $y=2$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-3;2)$.	0,5 điểm
--	---	----------

Bài 3. (4 điểm) Cho dãy số (a_n) như sau: $a_1=a_2=1$ và $a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+a_n, \forall n=1,2,\dots$ Tìm a_{2024} .

Hướng dẫn giải

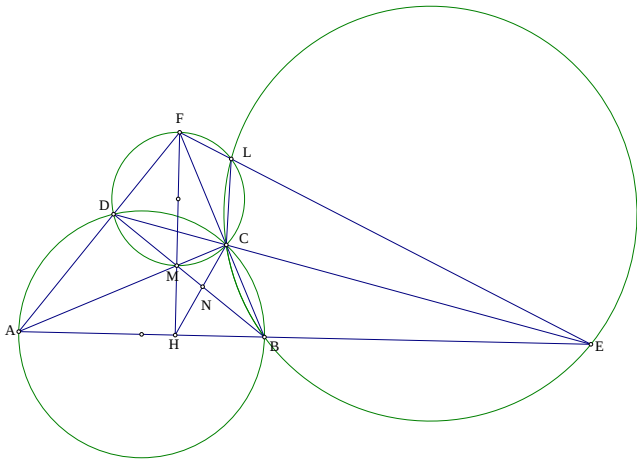
Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
Bài 3. (4 điểm)	Ta có $a_{n+2}a_{n+1}=a_{n+1}a_n+1; \forall n=1,2,\dots$	
	$a_3a_2=a_2a_1+1$	0.5 điểm
	$a_4a_3=a_3a_2+1$	
	$\dots=\dots$	0.5 điểm
	$a_{n+1}a_n=a_na_{n-1}+1$	
	$\Rightarrow a_{n+1}a_n=a_2a_1+n-1$	0.5 điểm
	$\Rightarrow a_{n+1}a_n=n$	
	$\Rightarrow a_{n+1}=\frac{n}{a_n}; \forall n=1,2,\dots$	0.5 điểm
	Do đó :	
	$a_{n+2}=\frac{n+1}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}a_n; \forall n=1,2,\dots$	0.5 điểm
	Nên $a_{2024}=\frac{2023}{2022}a_{2022}=\frac{2023}{2022} \cdot \frac{2021}{2020}a_{2020}=\frac{2023}{2022} \cdot \frac{2021}{2020} \cdot \frac{2019}{2018}a_{2018}$	0.5 điểm
	$=\dots=\frac{2023.2021.2019\dots3}{2022.2020.2018\dots2}a_2=\frac{3.5\dots2021.2023}{2.4\dots2020.2022}=\frac{2023!!}{2022!!}$	0.5 điểm
	$a_{2024}=\frac{2023!!}{2022!!}$	0,5 điểm
	Lưu ý : Kí hiệu $(2n-1)!!=1.3.5\dots(2n-1); (2n)!!=2.4.6\dots(2n)$	

Bài 4. (6 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB . Biết rằng các cặp đường thẳng AB, CD cắt nhau tại E và AD, BC cắt nhau tại F . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại M . Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng AB . Hai đường thẳng CH và BD cắt nhau tại N .

a) Chứng minh rằng $\frac{DB}{DM} \cdot \frac{NM}{NB} = 1$.

b) Hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCE và CDF cắt nhau tại điểm thứ hai là L . Chứng minh rằng ba điểm E, F, L thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
Bài 4. (6 điểm)		0.5 điểm
	a). Tứ giác $BCMH$ nội tiếp đường tròn đường kính MB $\Rightarrow \angle ACN = \angle ABD$ (cùng chắn cung MH). Lại có $\angle ACD = \angle ABD \Rightarrow \angle ACN = \angle ACD \Rightarrow CM$ là phân giác của $\angle DCN$. Mà $CM \perp CB \Rightarrow \triangle CDN$ có hai đường phân giác trong và ngoài của góc C là CM và CB. Suy ra: $\frac{MD}{MN} = \frac{CD}{CN} = \frac{BD}{BN}$ (tính chất đường phân giác). Vậy $\frac{DB}{DM} \cdot \frac{NM}{NB} = \frac{BD}{BN} \cdot \frac{MN}{MD} = \frac{BD}{BN} \cdot \frac{MD}{MN} = 1$.	0.5 điểm 0.5 điểm 0.5 điểm 0.5 điểm 0.5 điểm
	b) $\angle DLC = \angle AFB$ (cùng chắn cung DC của đường tròn (CDF)) (1) Tứ giác $BCLE$ nội tiếp nên $\angle CLE + \angle CBE = 180^\circ$ mà $\angle ABF + \angle CBE = 180^\circ$ nên $\angle ABF = \angle CLE$ (2). Mà $\angle FAB = \angle DCF$ (cùng bù góc BCD). Mặt khác $\angle DCF = \angle FLD$ (cùng chắn cung DF của đường tròn $(CDF) \Rightarrow \angle FLD = \angle FAB$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra: $\angle FLE = \angle FLD + \angle DLC = \angle FAB + \angle AFB + \angle ABF = 180^\circ$. Vậy ba điểm E, F, L thẳng hàng.	0.5 điểm 0.5 điểm 0.5 điểm 0.5 điểm 0.5 điểm 0.5 điểm

----- Hết -----