

Câu 1 (4,0 điểm).

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để M nhận giá trị là một số nguyên tố.

$$M = |x^3 - 2x^2 - 10x + 8|$$

Câu 2 (4,0 điểm).

Cho ba số $A; B; C$ thỏa mãn

$$|\sin A + \sin B + \sin C| \geq \sqrt{5}$$

Chứng minh rằng $|\cos A + \cos B + \cos C| \leq 2$

Câu 3 (4,0 điểm).

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn

$$f[2f(x) + f(y)] = 2x + y \quad \text{với mọi } x; y \in \mathbb{R}$$

Câu 4 (4,0 điểm).

Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 2; u_{n+1} = 4u_n + \sqrt{15u_n^2 - 60}$ ($n \in \mathbb{N}$).

- Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số tăng.
- Chứng minh rằng dãy số (u_n) có các số hạng đều là số nguyên.
- Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n) .

Câu 5 (4,0 điểm).

Các điểm $P; Q; R$ nằm trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho AP, BQ, CR cắt nhau tại S đồng thời thỏa mãn

$$S_{ABS} = S_{QSPC} \quad \text{và} \quad \frac{S_{ARC}}{S_{BRC}} = \frac{(CA)^4}{(BC)^4}$$

Chứng minh rằng tứ giác $ABPQ$ nội tiếp trong một đường tròn.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Họ và tên thí sinh.; Số báo danh.

Câu 6 (5,0 điểm).

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ ay^2 + by + c = z \\ az^2 + bz + c = x \end{cases} \quad (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

Chứng minh rằng nếu $(b - 1)^2 \geq 4ac$ thì hệ phương trình có nghiệm.

Câu 7 (5,0 điểm).

Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có nghiệm.

Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$$

Câu 8 (5,0 điểm).

Một bảng ô vuông hình chữ nhật có 2020 hàng và 2021 cột. Ký hiệu (m, n) ($1 \leq m \leq 2020; 1 \leq n \leq 2021$) là ô vuông nằm ở hàng thứ m và cột thứ n . Thực hiện tô màu các ô vuông của bảng theo quy tắc sau:

+ Lần thứ nhất tô màu hai ô vuông $(r, s); (r + 1; s + 1)$ với $1 \leq r \leq 2019$
 $1 \leq s \leq 2020$.

+ Lần thứ hai trở đi, tô màu hai ô vuông chưa có màu nằm cạnh nhau trong cùng một hàng hay cùng một cột.

Chứng minh không thể tô màu tất cả các ô của bảng đã cho.

Câu 9 (5,0 điểm).

Cho ABC là tam giác có ba góc nhọn. Gọi A', B' và C' là các điểm đối xứng với A, B và C lần lượt qua BC, CA và AB . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABB' và ACC' có A_1 là điểm chung thứ hai. Tương tự B_1 và C_1 là điểm chung thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $BAA'; BCC'$ và $CAA'; CBB'$. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1 và CC_1 đồng quy.

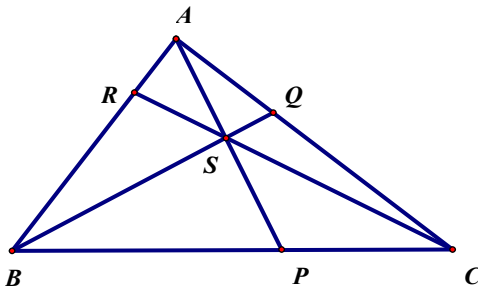
-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay

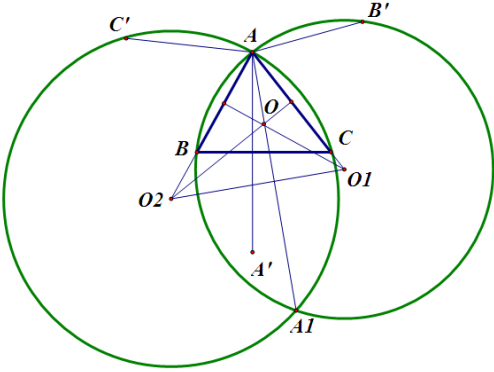
Họ và tên thí sinh.; Số báo danh.

Câu	Lược giải	Điểm
Câu 1 4,0 điểm	Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $M = x^3 - 2x^2 - 10x + 8 $ là một số nguyên tố. Ta có $M = x - 4 x^2 + 2x - 2 $	1,0 đ
	Do x là số nguyên nên $ x - 4 $; $ x^2 + 2x - 2 $ đều là số nguyên Để M là số nguyên tố thì một trong hai số $ x - 4 $ hay $ x^2 + 2x - 2 $ phải bằng 1.	1,0 đ
	Trường hợp: $ x - 4 = 1 \Rightarrow x = 3; x = 5 \Rightarrow M = 13; M = 33(\text{loại})$	1,0 đ
	Trường hợp: $ x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = \pm 1$ $x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -3$ $\Rightarrow M = 3; M = 7$ $x^2 + 2x - 2 = -1 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{5}(\text{loại})$ Vậy với $x = 1; 3; -3$ thỏa đề	1,0 đ
Câu 2 4,0 điểm	$ \sin A + \sin B + \sin C \geq \sqrt{5}$ Chứng minh rằng $ \cos A + \cos B + \cos C \leq 2$. Đặt $a = \sin A; b = \sin B; c = \sin C$ theo giả thiết ta có $ a + b + c \geq \sqrt{5}$ Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{5}{3}$ Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$	1,5 đ
	Ta lại có $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{1}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)^2$ $\Leftrightarrow 3[(1 - a^2) + (1 - b^2) + (1 - c^2)] \geq (\cos A + \cos B + \cos C)^2$ $\Leftrightarrow 9 - 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (\cos A + \cos B + \cos C)^2$	1,5 đ
	$\Leftrightarrow 9 \geq (\cos A + \cos B + \cos C)^2 + 3(a^2 + b^2 + c^2)$ $\Leftrightarrow 9 \geq (\cos A + \cos B + \cos C)^2 + 5$ $\Leftrightarrow 4 \geq (\cos A + \cos B + \cos C)^2$ Vậy $ \cos A + \cos B + \cos C \leq 2$; dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \pm \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	1,0 đ
Câu 3 4,0 điểm	Hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2f(x) + f(y)) = 2x + y \quad \text{với mọi } x; y \in \mathbb{R} \quad (1)$ Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ không thỏa mãn + Thay y bởi x vào (1) ta được $f(3f(x)) = 3x \quad (2)$ + Thay x bởi $3f(x)$ vào (2) ta được $f[3f(3f(x))] = 9f(x)$ $\Leftrightarrow f(9x) = 9f(x) \quad (3)$	1,0 đ

	+ Cho $x = 0$ vào (3) ta được $f(0) = 9f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ + Cho $x = 0$ vào (1) ta được $f(f(y)) = y$ (4) + Cho $y = 0$ vào (1) ta được $f(2f(x)) = 2x$ Như vậy (1) viết lại là $f[2f(x) + f(y)] = f[2f(x)] + f[f(y)]$ (5)	1,5 đ
	Từ (4) ta chứng minh $f: R \rightarrow R$ là song ánh Thật vậy giả sử $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$; f đơn ánh Với mọi $y \in R$, xét $x = f(y) \in R$ khi đó $f(x) = f(f(y)) = y$ vậy f là toàn ánh Hay f là song ánh.	0,5 đ
	Do vậy với mỗi $u; v \in R$ luôn tồn tại $x; y$ sao cho $2f(x) = u; f(y) = v$ Khi đó (5) viết lại là $f(u + v) = f(u) + f(v)$ Theo phương trình hàm Cauchy ta được $f(x) = ax$. Thay vào (2) ta có $f(3ax) = 3x \Leftrightarrow a(3ax) = 3x \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$ Thử lại ta thấy $f(x) = x$ hay $f(x) = -x$ thỏa đề bài.	1,0 đ
Câu 4a 1,0 điểm	a. $u_1 = 2; u_{n+1} = 4u_n + \sqrt{15u_n^2 - 60}$. Ta có $u_1 = 2 > 0; u_2 = 8 > 0; u_{n+1} = 4u_n + \sqrt{15u_n^2 - 60} \geq 4u_n (n > 1) \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$ Dãy số u_n là dãy tăng.	1,0 đ
Câu 4b 2,0 điểm	b. Chứng minh rằng dãy số có các số hạng đều là số nguyên. $u_{n+1} = 4u_n + \sqrt{15u_n^2 - 60} \Leftrightarrow u_{n+1} - 4u_n = \sqrt{15u_n^2 - 60}$ $\Leftrightarrow u_{n+1}^2 - 8u_n u_{n+1} + 16u_n^2 = 15u_n^2 - 60$ $\Leftrightarrow u_{n+1}^2 - 8u_n u_{n+1} + u_n^2 + 60 = 0 (*)$ Thay n bởi $n - 1$ ta được $u_n^2 - 8u_{n-1}u_n + u_{n-1}^2 + 60 = 0 (**)$ Lấy (*) trừ (**) ta được $u_{n+1}^2 - u_n^2 - 8u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) + u_n^2 - u_{n-1}^2 = 0$ $u_{n+1}^2 - 8u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) - u_{n-1}^2 = 0$ $(u_{n+1} - u_{n-1})[u_{n+1} + u_{n-1} - 8u_n] = 0$ Do dãy tăng nên $(u_{n+1} - u_{n-1}) > 0$ $\Rightarrow u_{n+1} - 8u_n + u_{n-1} = 0 (***)$ Từ (***) ta nhận thấy dãy u_n có các số hạng đều là số nguyên.	1,0 đ
Câu 4c 1,0 điểm	c. Tìm số hạng tổng quát của dãy u_n. $u_{n+1} - 8u_n + u_{n-1} = 0 (***)$ Ta có phương trình đặt trung $\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$ phương trình có hai nghiệm $\lambda = 4 \pm \sqrt{15}$ Do $u_1 = 2; u_2 = 8$ ta được $u_n = (4 + \sqrt{15})^{n-1} + (4 - \sqrt{15})^{n-1}$ Vậy số hạng tổng quát của dãy là $u_n = (4 + \sqrt{15})^{n-1} + (4 - \sqrt{15})^{n-1}$	1,0 đ

Câu 5 4,0 điểm	Các điểm $P; Q; R$ nằm trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho AP, BQ, CR cắt nhau tại S đồng thời thỏa mãn $S_{ABS} = S_{QSPC} \text{ và } \frac{S_{ARC}}{S_{BRC}} = \frac{CA^4}{BC^4}$ Chứng minh rằng tứ giác $ABPQ$ nội tiếp trong một đường tròn. Giải: Đặt $a = BC; b = AC; h_a; h_b$ là hai đường cao kẻ từ A và B của tam giác ABC. Từ giả thiết $S_{ABS} = S_{QSPC} \Rightarrow S_{ABS} + S_{PBS} = S_{QSPC} + S_{PBS} \Rightarrow S_{ABP} = S_{QBC}$	1,0 đ
	$\Leftrightarrow BP \cdot h_a = CQ \cdot h_b \Leftrightarrow BP = \frac{h_b}{h_a} CQ = \frac{a}{b} CQ$ Tương tự ta được $S_{ABS} = S_{QSPC} \Rightarrow S_{ABQ} = S_{APC} \Rightarrow AQ = \frac{b}{a} CP.$	1,0 đ
	Ta lại có $\frac{S_{ARC}}{S_{BRC}} = \frac{CA^4}{BC^4} \Leftrightarrow \frac{AR}{BR} = \frac{CA^4}{BC^4} \Leftrightarrow \frac{AR}{BR} = \frac{b^4}{a^4}$	1,0 đ
	Xét $\frac{BP \cdot CQ \cdot AR}{CP \cdot AQ \cdot BR} = \frac{\frac{a}{b} CQ \cdot CQ}{CP \cdot \frac{b}{a} \cdot CP} \cdot \frac{AR}{BR} = \frac{a^2 CQ^2}{b^2 CP^2} \cdot \frac{b^4}{a^4} = \left(\frac{b \cdot CQ}{a \cdot CP} \right)^2$ Theo định lý Ceva cho tam giác ABC ta được AP, BQ, CR cắt nhau tại S nên $\frac{BP \cdot CQ \cdot AR}{CP \cdot QA \cdot RB} = 1 \Rightarrow \frac{b \cdot CQ}{a \cdot CP} = 1 \Rightarrow b \cdot CQ = a \cdot CP$ Do $a = BC; b = AC$ nên ta được $AC \cdot CQ = BC \cdot CP \Leftrightarrow CQ \cdot CA = CP \cdot CB$ hay tứ giác $ABPQ$ nội tiếp đường tròn.	1,0 đ
		
Câu 6 5,0 điểm	$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ ay^2 + by + c = z \ (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0) \\ az^2 + bz + c = x \end{cases}$ Giải: Viết hệ phương trình trở thành $\begin{cases} ax^2 + (b-1)x + c = y-x \\ ay^2 + (b-1)y + c = z-y \\ az^2 + (b-1)z + c = x-z \end{cases}$	1,0 đ
	Đặt $X_1 = y - x; X_2 = z - y; X_3 = x - z \Rightarrow X_1 + X_2 + X_3 = 0 (*)$ $\begin{cases} ax^2 + (b-1)x + c = X_1 \\ ay^2 + (b-1)y + c = X_2 \\ az^2 + (b-1)z + c = X_3 \end{cases}$	1,0 đ
	Nếu $(b-1)^2 - 4ac < 0 \Rightarrow ax^2 + (b-1)x + c$ cùng dấu với $a \Rightarrow X_1; X_2; X_3$ cùng dấu với a khi đó $(*)$ không thỏa, vậy hệ vô nghiệm.	1,0 đ

Câu 7 5,0 điểm	Nếu $(b-1)^2 - 4ac = 0 \Rightarrow ax^2 + (b-1)x + c = a(x-x_0)^2$ $x_0 = \frac{1-b}{2a}$ Hệ trở thành $\begin{cases} a(x-x_0)^2 = X_1 \\ a(y-x_0)^2 = X_2 \\ a(z-x_0)^2 = X_3 \end{cases}$ Khi đó $x = y = z = \frac{1-b}{2a} \Rightarrow X_1 = X_2 = X_3 = 0$ nên hệ có nghiệm.	1,0 đ
	Nếu $(b-1)^2 - 4ac > 0 \Rightarrow ax^2 + (b-1)x + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ Hệ trở thành $\begin{cases} a(x-x_1)(x-x_2) = X_1 \\ a(y-x_1)(y-x_2) = X_2 \\ a(z-x_1)(z-x_2) = X_3 \end{cases}$ Hệ đã cho có ít nhất hai nghiệm $x = y = z = \frac{1-b \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}}{2a}$ Vậy $(b-1)^2 - 4ac \geq 0$ thì hệ có nghiệm.	1,0 đ
	Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$ Gọi x_0 là nghiệm của phương trình, ta được $ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 = -(1+x_0^4)$	1,0 đ
	Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có $(a^2 + b^2 + c^2)(x_0^6 + x_0^4 + x_0^2) \geq (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0)^2 = (1+x_0^4)^2$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(1+x_0^4)^2}{x_0^6 + x_0^4 + x_0^2}$ Dấu bằng xảy ra khi $a:x_0^3 = b:x_0^2 = c:x_0$	1,0 đ
Câu 7 5,0 điểm	Ta chứng minh $\frac{(1+x_0^4)^2}{x_0^6 + x_0^4 + x_0^2} \geq \frac{4}{3} (*)$ Thật vậy $(*) \Leftrightarrow 3 + 6x_0^4 + 3x_0^8 \geq 4x_0^6 + 4x_0^4 + 4x_0^2$ $\Leftrightarrow 3x_0^8 - 4x_0^6 + 2x_0^4 - 4x_0^2 + 3 \geq 0$ $\Leftrightarrow (x_0^2 - 1)(3x_0^6 - x_0^4 + x_0^2 - 3) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x_0^2 - 1)^2(3x_0^4 + 2x_0^2 + 3) \geq 0$ Dấu bằng xảy ra khi $x_0 = \pm 1$ Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên $(*)$ đúng.	2,0 đ
	Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$ dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \frac{a}{-1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{-1} \\ 1 - a + b - c + 1 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} \\ 1 + a + b + c + 1 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow a = -b = c = \frac{2}{3} \text{ hoặc } a = b = c = -\frac{2}{3}$	1,0 đ

Câu 8 5,0 điểm	Chia các ô vuông của bảng thành hai loại + Loại I gồm các ô $(m; n)$ với $m + n \equiv 0 \pmod{2}$ + Loại II gồm các ô $(m; n)$ với $m + n \equiv 1 \pmod{2}$ Vì 2020 chia hết cho 2 nên số ô của hai loại đều bằng nhau. Lần thứ nhất tô hai ô cùng loại vì $r + 1 + s + 1 = r + s \pmod{2}$ Lần thứ hai trở đi tô hai ô khác loại vì cùng một hàng hay cùng một cột Như vậy tổng các ô sau mỗi lần tô đều chênh lệch số loại. Vậy không thể tô hết tất cả các ô của bảng	5,0 đ
Câu 9 5,0 điểm	Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. A', B' và C' là các điểm đối xứng với A, B và C lần lượt qua BC, CA và AB . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABB' và ACC' có A_1 là điểm chung thứ hai. Tương tự B_1 và C_1 là điểm chung thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $BAA'; BCC'$ và $CAA'; CBB'$. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1 và CC_1 đồng quy. Gọi O_1, O_2 và O lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABB', ACC' và ABC . Ta có AB là trung trực của đoạn thẳng CC' và $O_2C = O_2C' \Rightarrow O_2 \in AB$	 1,0 đ
	O_2 là giao điểm của AB và đường trung trực của đoạn AC . Tương tự O_1 là giao điểm của AC đường trung trực của AB .	1,0 đ
	Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh AB và AC . $\Rightarrow O_1O; O_2O$ là hai đường cao của tam giác AO_1O_2 . Hay O là trực tâm của tam giác AO_1O_2 . $\Rightarrow AO$ vuông góc với O_1O_2 .	1,0 đ
	Mặt khác, đoạn AA_1 là điểm chung của hai đường tròn, nên AA_1 vuông góc với O_1O_2 . $\Rightarrow AA_1$ là đường cao của tam giác AO_1O_2 Kết luận AA_1 đi qua O .	1,0 đ
	Tương tự BB_1 và CC_1 đi qua O Vậy ba đường thẳng AA_1, BB_1 và CC_1 đồng quy tại O .	1,0 đ

Lưu ý: Thí sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.