

SỞ GD & ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

KỶ THI KHẢO SÁT CÁC MÔN THI VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN LAM SƠN
NĂM HỌC 2023

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán (chuyên)

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề) Ngày
thi: 16/04/2023 Đề thi có: 01 trang gồm 05 câu

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 - 3xy = 10$ và $y^2 + xy = 6$. Tính $A = x + 3y$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz(x + y + z) = 1$. Chứng minh

$$\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = (x + y)(y + z)(z + x)$$

Câu 2: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $2(3x + 1) + \frac{7}{x} = 5\sqrt{2x + 7}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3y^2 + 3x - 6y - 4 = 0 \\ x^2 - 3x - 2y + \sqrt{3x + y + 5} = 0 \end{cases}$

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^5 + 2024x = y^5 + 1$

b) Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $44x^2 + 1 = y^2$. Chứng minh $2y + 2$ là số chính phương.

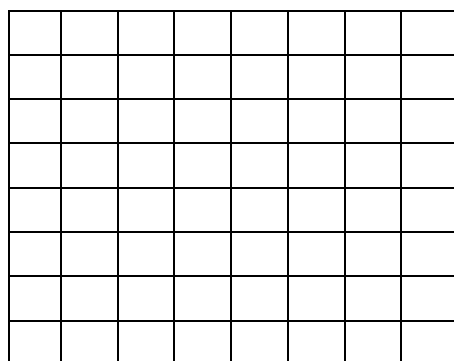
Câu 4: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O), phân giác trong của góc BAC cắt BC tại D và cắt (O) tại Q (Q khác A). Từ D dựng DE, DF lần lượt vuông góc với AC, AB (E thuộc AC, F thuộc AB). Gọi M là trung điểm của BC, tia QM cắt (O) tại giao điểm thứ hai là P.

a) Chứng minh QM. QP = QD. QA

b) Gọi N là giao điểm của PD và EF. Chứng minh MN // AD.

c) Dựng đường kính AK của (O). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFN và CEN cắt nhau tại R (R khác N). Chứng minh các điểm P, D, R thẳng hàng.

Câu 5(1, 0 điểm): Xét một bảng ô vuông cỡ 8×8 gồm 64 ô vuông. Chứng minh với mọi cách đánh dấu 7 ô vuông của bảng, ta luôn tìm được một hình chữ nhật gồm 8 ô vuông mà không có ô nào bị đánh dấu

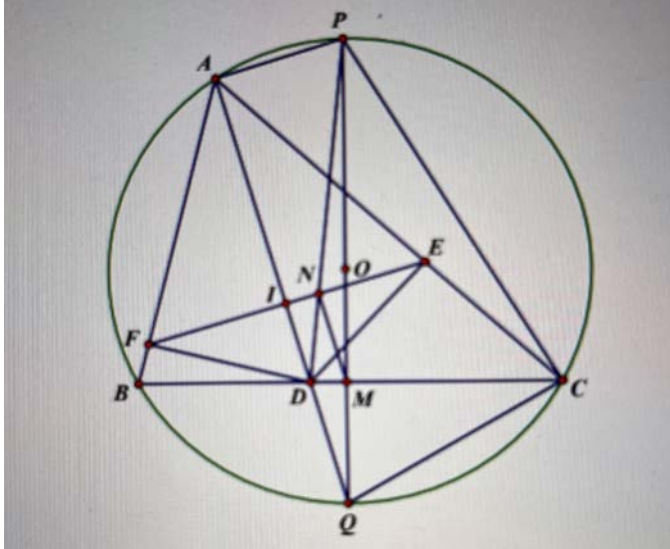


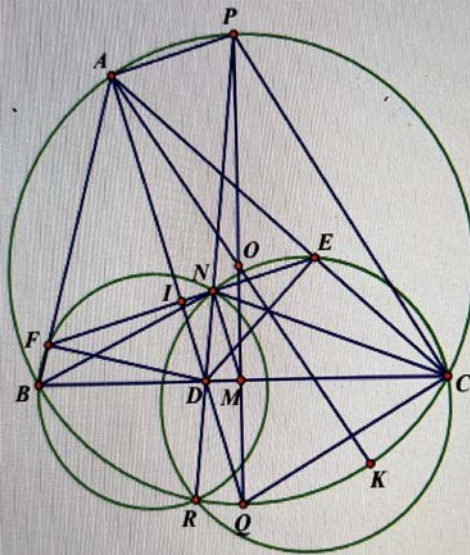
ĐÁP ÁN KỲ THI KHẢO SÁT CÁC MÔN THI VÀO LỚP 10**THPT CHUYÊN LAM SƠN****NĂM HỌC 2023 - 2024***Môn thi: Toán (chuyên)**Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)**Ngày thi: 16/04/2023 Đáp án có: 06 trang*

Câu	Nội dung	Điểm
1 (2,0điểm)	a) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 - 3xy = 10$ và $y^2 + xy = 6$. Tính $A = x + 3y$.	1,0
	Từ giả thiết $x^2 - 3xy = 10$ và $y^2 + xy = 6$. Cho ta $x^2 - 3xy + 9(y^2 + xy) = 64$ $\Leftrightarrow (x + 3y)^2 = 64$ $\Leftrightarrow x + 3y = 8$ (vì x, y là số thực dương) Vậy $A = x + 3y = 8$	1,0
	b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz(x + y + z) = 1$. CM: $\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = (x + y)(y + z)(z + x)$	1,0
	Ta có $x^2 + \frac{1}{y^2} = \frac{x^2y^2 + 1}{y^2} = \frac{x^2y^2 + xyz(x + y + z)}{y^2}$ $= \frac{xy(xy + xz + yz + z^2)}{y^2} = \frac{x(x + z)(y + z)}{y}$ Tương tự $y^2 + \frac{1}{z^2} = \frac{y(x + z)(y + x)}{z}$ $z^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{z(y + z)(y + x)}{x}$ Khi đó $\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{x^2}\right)}$ $= \sqrt{\frac{x(x + z)(y + z)}{y} \cdot \frac{y(x + z)(y + x)}{z} \cdot \frac{z(y + z)(y + x)}{x}}$ $= (x + y)(y + z)(z + x)$	
2 (2,0điểm)	a) Giải phương trình $2(3x + 1) + \frac{7}{x} = 5\sqrt{2x + 7}$	1,0
	ĐK: $x \neq 0; x \geq \frac{-7}{2}$	

0,25

	Vậy nghiệm của hệ pt $(x, y) = (3; -2); (\frac{7-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-5}{2})$	0,25
3 (2,0điểm)	a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^5 + 2024x = y^5 + 1$	1,0
	Ta có $x^5 - x + 2025x = y^5 + 1$ $\Leftrightarrow x(x^4 - 1) + 2025x = y^5 + 1$ $\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1) + 2025x = y^5 + 1$ $\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x^2-4+5) + 2025x = y^5 + 1$ $\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x+2)(x-2) + 5x(x+1) + 2025x = y^5 + 1(1)$ Do $x(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$ là tích của 5 số liên tiếp nên chia hết cho 5. Khi đó VT (1) = $x(x-1)(x+1)(x+2)(x-2) + 5x(x+1) + 2025x$ Chia hết cho 5. VP(1) = $y^5 + 1$ chia cho 5 dư 2 hoặc 1 Vậy vế trái của (1) chia hết cho 5, vế phải của (1) không chia hết cho 5 nên phương trình (1) vô nghiệm, hay phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.	
	b) Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $44x^2 + 1 = y^2$. <i>Chứng minh $2y + 2$ là số chính phương.</i>	1,0
	Dễ thấy y là số lẻ nên đặt $y = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$ Khi đó ta có $44x^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 1$ $\Rightarrow 11x^2 = k(k+1) (*)$ $\Rightarrow k(k+1)$ chia hết cho 11 Do 11 là SNT nên hoặc k chia hết cho 11 hoặc k + 1 chia hết cho 11	0,25
	TH1: $k : 11$, đặt $k = 11.m (m \in \mathbb{N})$ Thay vào (*) ta có $x^2 = m(11m + 1)$ Lại có $(m; 11m+1) = 1 \Rightarrow m$ và $11m+1$ đều là các số chính phương. $\Rightarrow \begin{cases} m = a^2 \\ m+1 = b^2 \end{cases}$ với a, b là STN, $b > 0$ Khi đó $2y + 2 = 4k + 4 = 44m + 4 = 4b^2$ là SCP.	0,25
	TH2: $k + 1 : 11$, đặt $k + 1 = 11.n (n \in \mathbb{N})$ Thay vào (*) ta có $x^2 = n(11n - 1)$ Lại có $(n; 11n - 1) = 1 \Rightarrow n$ và $11n - 1$ đều là các số chính phương. $\Rightarrow \begin{cases} n = c^2 \\ n - 1 = d^2 \end{cases}$ với c, d là STN khác 0 Khi đó ta có $11c^2 - d^2 = 1 \Rightarrow 12c^2 = c^2 + d^2 + 1 (**)$ Ta thấy VT(**) = $12c^2$ chia hết cho 4 VP(**) = $c^2 + d^2 + 1$ chia cho 4 chỉ có thể có số dư là 1; 2 hoặc 3 nên (**) không xảy ra. Vậy nếu các số nguyên dương x, y thỏa mãn $44x^2 + 1 = y^2$ thì $2y + 2$ là số chính phương.	0,5
4 (3,0điểm)	Câu 4: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O), phân giác trong của góc BAC cắt BC tại D và cắt (O) tại Q (Q khác A). Từ D dựng DE, DF lần lượt vuông góc với AC, AB	

	(E thuộc AC, F thuộc AB). Gọi M là trung điểm của BC, tia QM cắt (O) tại giao điểm thứ hai là P. a) Chứng minh QM. QP = QD. QA b) Gọi N là giao điểm của PD và EF. Chứng minh MN // AD. c) Dựng đường kính AK của (O). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFN và CEN cắt nhau tại R (R khác N). Chứng minh các điểm P, D, R thẳng hàng.	
		
	a) Xét $\triangle QMD$ và $\triangle QAP$ có $\widehat{QMD} = \widehat{QAP} = 90^\circ$ $\widehat{Q}$ là góc chung $\Rightarrow \triangle QMD$ đồng dạng $\triangle QAP$ (g.g) $\Rightarrow \frac{QM}{QD} = \frac{QA}{QP} \Rightarrow QM \cdot QP = QD \cdot QA$	1,0
	b) Gọi I là giao điểm của AD và EF Ta chứng minh $\triangle AED$ đồng dạng với $\triangle PQD$ (g.g), có các đường cao tương ứng EI và CM nên $\frac{QM}{QP} = \frac{DI}{DA}$ Mà $NI \parallel AP \Rightarrow \frac{DI}{DA} = \frac{DN}{DP}$ $\Rightarrow \frac{QM}{QP} = \frac{DN}{DP}$ $\Rightarrow MN \parallel DQ$ Hay $MN \parallel AD$	1,0



c) Gọi R là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFN và tam giác CEN. Trước hết, ta chứng minh $R \in (O)$.

Ta có $\widehat{BRC} = \widehat{BRN} + \widehat{CRN} = \widehat{AEF} + \widehat{AFE} = 180^\circ - \widehat{BAC}$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABRC nội tiếp

$\Rightarrow R \in (O)$

$\Rightarrow \widehat{NRC} = \widehat{NEA} = \widehat{EAP} = \widehat{PRC}$

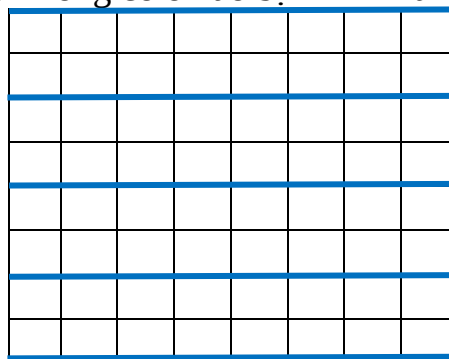
$\Rightarrow P, D, R$ thẳng hàng.

(ĐCCM)

1,0

5
(1,0điểm)

Xét một bảng ô vuông cỡ 8×8 gồm 64 ô vuông. Chứng minh với mọi cách đánh dấu 7 ô vuông của bảng, ta luôn tìm được một hình chữ nhật gồm 8 ô vuông mà không có ô nào bị đánh dấu



Ta chia bảng vuông đã cho thành 8 bảng hình chữ nhật cỡ 2×4 như hình vẽ. Theo đề bài ta chỉ đánh dấu đúng 7 ô vuông của bảng nên theo nguyên lý Dirichle, luôn tồn tại ít nhất một bảng con trong số 8 bảng trên không chứa ô nào bị đánh dấu, do đó ta có được điều phải chứng minh.

1,0