

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất: 24/11/2021

(Đề thi có 01 trang, gồm 04 bài)

Bài 1. (5,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ x^3 + x^2y^3 + y^3 = 1 + x^2 - x^5 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 2. (5,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 5 \\ n.u_{n+2} - (4n+1)u_{n+1} + 3(n+1)u_n = 2 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

a) Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n}$.

b) Chứng minh rằng $2 \sum_{i=1}^{2021} u_i + 3(1 - 3^{2021})$ chia hết cho 2021.

Bài 3. (5,0 điểm) Cho 2 đường tròn (O, R) và (O', R') cắt nhau tại A và B . Gọi CD là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ($C \in (O)$ và $D \in (O')$, đồng thời B, C, D nằm cùng phía có bờ là OO'). Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng BC và AD , F là giao điểm của hai đường thẳng BD và AC , G là giao điểm của hai đường thẳng EF và AB , H là hình chiếu của G lên CD .

a) Chứng minh rằng $EF \parallel CD$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{CAB} = \widehat{DAH}$.

Bài 4. (5,0 điểm) Cho n là số nguyên dương. Nam có n đồng xu (mỗi đồng xu có một mặt Ngửa (N) và một mặt Sấp (S)) để nằm ngẫu nhiên thành một dãy trên mặt bàn. Dãy n đồng xu được gọi là ở “trạng thái nghỉ” nếu tất cả các mặt của đồng xu đều là mặt Sấp. Từ một trạng thái ban đầu $T = \underbrace{***\dots*}_n$ của dãy n đồng xu (với $*$ là S hoặc N), Nam lặp đi lặp lại các thao tác sau: nếu có k đồng xu xuất hiện mặt (N) với $k > 0$, thì Nam lật ngược đồng xu vị trí thứ k hoặc Nam dừng lại nếu T đạt trạng thái nghỉ. Ký hiệu $b(T)$ là số bước để đưa T về trạng thái nghỉ. (Ví dụ với $n = 3$ đồng xu nằm trên mặt bàn có trạng thái ban đầu là $T = SNS$ thì Nam sẽ thực hiện $SNS \rightarrow NNS \rightarrow NSS \rightarrow SSS$, và có $b(T) = 3$).

a) Giả sử Nam có ba trạng thái ban đầu của dãy năm đồng xu nằm trên mặt bàn là $T_1 = NNSNN$, $T_2 = SNSNS$, $T_3 = SNSNN$. Em hãy viết các bước mà Nam đưa chúng về trạng thái nghỉ và tính $b(T_1)$, $b(T_2)$, $b(T_3)$.

b) Với dãy n đồng xu nằm trên mặt bàn ta sẽ có 2^n trạng thái ban đầu. Ứng với mỗi trạng thái ban đầu T ta có $b(T)$ là số bước để đưa T về trạng thái nghỉ, biết $b(T)$ là hữu hạn. Tính $E(n)$ là số bước trung bình để đưa dãy n đồng xu về trạng thái nghỉ.

-----HẾT-----

Ghi chú:

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai: 25/11/2021

(Đề thi có 01 trang, gồm 03 bài)

Bài 5. (6,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$3 - 5(ab + bc + ca) + 6abc(a + b + c) \geq 0.$$

Bài 6. (7,0 điểm)

Với mỗi số nguyên dương n lớn hơn hoặc bằng 2, ta viết $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ là tất cả các ước của n theo thứ tự tăng dần. Tìm tất cả các giá trị của n sao cho 2022 là ước của n và $n = d_{21} \cdot d_{22}$.

Bài 7. (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BN, CM cắt nhau tại H . Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng MN và BC . Đường thẳng qua A song song với SH cắt CM, BN lần lượt tại P, Q .

a) Gọi I là trung điểm BC và G là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN và đường tròn (O) . Chứng minh rằng tam giác IPQ cân.

b) Gọi K là trung điểm MN . Hai đường thẳng HI và MN cắt nhau tại T . Chứng minh rằng hai đường tròn (HMN) và (HTK) tiếp xúc với nhau.

-----HẾT-----

Ghi chú:

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.