

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

Môn thi: Toán (Chuyên)

Ngày thi: 09/06/2023

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (1,0 điểm) Thực hiện phép tính, tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{2032 + 6\sqrt{2023}} + \sqrt{2032 - 6\sqrt{2023}}.$$

(<https://s.shopee.vn/6f>)

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2023}}.$$

Bài 2: (1,0 điểm) Giải các phương trình:

a) $3\sqrt{x^2 + 3x} + 3x = 10 - x^2.$

b) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0.$

Bài 3: (1,5 điểm) Cho đường thẳng $(d_1): (m-2)x + y = 3m + x - 5$ (với m là tham số)

và đường thẳng $(d_2): y = -2x + 6.$

a) Chứng tỏ rằng, với mọi m thì đường thẳng (d_1) luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.

b) Khi $m = \frac{5}{2}$, vẽ (d_1) và (d_2) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy . Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của: (d_1) và (d_2) ; (d_1) và trục Ox ; (d_2) và trục Ox . Tính diện tích của tam giác ABC .

Bài 4: (1,5 điểm) Năm học 2022 – 2023, hai trường THCS A và trường THCS B có tổng cộng 72 em học sinh thi đỗ vào lớp 10 trường chuyên của tỉnh. Kết quả tính chung cả hai trường thì tỉ lệ đỗ là 56,25%. Nếu tính riêng tỉ lệ đỗ của trường THCS A là 50%, trường THCS B là 60%. Hỏi trường THCS A và trường THCS B mỗi trường



có bao nhiêu học sinh dự thi vào lớp 10 trường chuyên của tỉnh ở năm học 2022 – 2023?

Bài 5: (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực tùy ý, thỏa $3a + 4b = 51$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{(a - 6)^2 + (b - 2)^2}$.

Bài 6: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 40^\circ$. Gọi E là điểm đối xứng của C qua AB , F là điểm đối xứng của B qua AC .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BEFC$ nội tiếp một đường tròn và tìm tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $BEFC$.

b) Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác EBC, FBC và ABC . Chứng minh rằng các đường thẳng EG_1, FG_2 và AG_3 đồng quy.

c) Cho $AB = a$, chứng minh rằng $\Delta G_1 G_2 G_3$ đồng dạng với ΔEFA và tính diện tích $\Delta G_1 G_2 G_3$ theo a .

Bài 7: (1,0 điểm) Tìm các số nguyên a để giá trị của biểu thức $\sqrt{519 - a^2} - 2a + 3$ là một số chính phương lẻ.

----- Hết -----



A. HƯỚNG DẪN CHUNG

(Hướng dẫn có 06 trang)

1/ Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

2/ Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất trong toàn Hội đồng chấm thi.

B. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

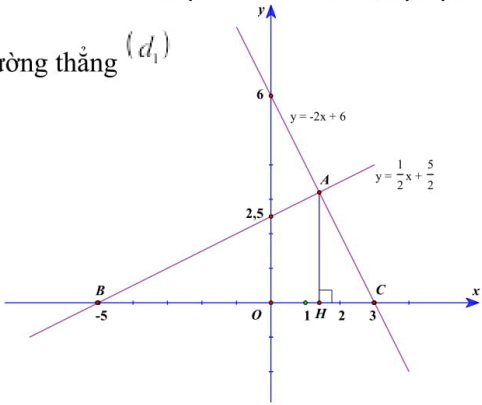
(<https://s.shopee.vn/6f>)

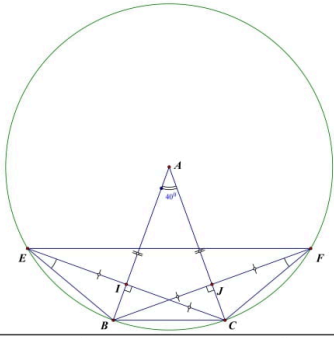
Bài	Đáp án	Điểm
1	$A = \sqrt{2032 + 6\sqrt{2023}} + \sqrt{2032 - 6\sqrt{2023}} = \sqrt{(\sqrt{2023} + 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2023} - 3)^2}$	0,25
	$= \sqrt{2023} + 3 + \sqrt{2023} - 3 = \sqrt{2023} + 3 + \sqrt{2023} - 3 = 2\sqrt{2023}.$	0,25
	$B = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{2023}}$ $= \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} + 1} + \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{(\sqrt{2024} + \sqrt{2023})(\sqrt{2024} - \sqrt{2023})}{\sqrt{2024} + \sqrt{2023}}$	0,25
	$= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2024} - \sqrt{2023} = \sqrt{2024} - 1.$	0,25
2	Phương trình: $3\sqrt{x^2 + 3x} + 3x = 10 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2 + 3x} - 10 = 0. \quad (*)$ Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x} \ (t \geq 0)$. Khi đó phương trình (*) trở thành phương trình: $t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \text{ (nhĩa)} \\ t = -5 \text{ (loại)} \end{cases}$	0,25
	Với $t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1; x = -4$.	0,25
	$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0. \quad (*)$ Điều kiện: $x \notin \{-1; -2; -3; -4\}$.	0,25

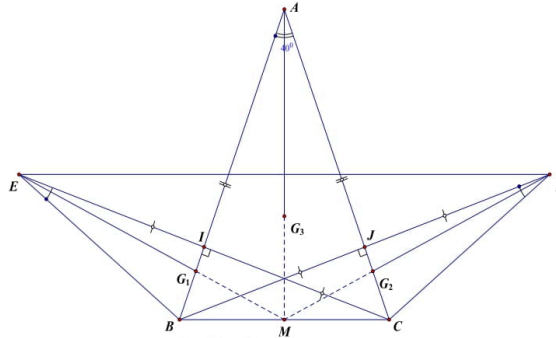
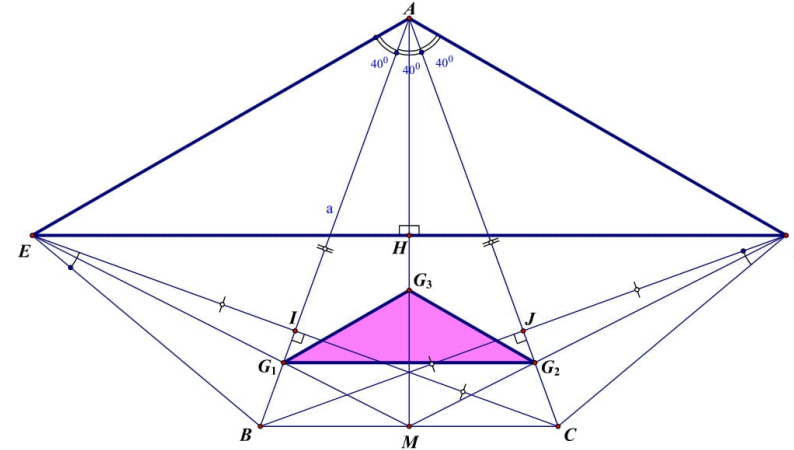
Trang 1/6



	b	Ta có (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{(x+1)(x+4)} + \frac{2x+5}{(x+2)(x+3)} = 0$ $\Leftrightarrow (2x+5) \left(\frac{1}{(x+1)(x+4)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \right) = 0 \Leftrightarrow 2(2x+5)(x^2+5x+5) = 0$	
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5=0 \\ x^2+5x+5=0 \end{cases}$ $2x+5=0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ (nhầm) $x^2+5x+5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5+\sqrt{5}}{2} \text{ (nhầm)} \\ x = \frac{-5-\sqrt{5}}{2} \text{ (nhầm)} \end{cases}$ Vậy tập hợp nghiệm của phương trình là $\left\{ -\frac{5}{2}; \frac{-5+\sqrt{5}}{2}; \frac{-5-\sqrt{5}}{2} \right\}$.	0,25
3	a	Viết lại đường thẳng $(d_1): (x-3)m - 3x + y + 5 = 0$. Vì (d_1) luôn đi qua điểm cố định $(x_0; y_0)$ với mọi m nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_0 - 3 = 0 \\ -3x_0 + y_0 + 5 = 0 \end{cases}$	0,25
		Giải hệ phương trình và kết luận điểm cố định cần tìm là $(x_0; y_0) = (3; 4)$.	0,25
	b	* Thay $m = \frac{5}{2}$. Đồ thị hàm của $(d_1): y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ cắt trục Ox và Oy lần lượt tại hai điểm $(-5; 0)$ và $(0; \frac{5}{2})$ và vẽ đúng đường thẳng (d_1)	0,25

	Đồ thị hàm của $(d_2): y = -2x + 6$ cắt trục Ox và Oy lần lượt tại hai điểm $(3; 0)$ và $(0; 6)$ và vẽ đúng đường thẳng (d_1) 	0,25
	Tìm được tọa độ điểm $A\left(\frac{7}{5}; \frac{16}{5}\right)$	0,25
	Kẻ đường cao AH. Khi đó $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} \cdot 8 = \frac{64}{5}$ (đvdt).	0,25
4	Gọi x (em) là số lượng học sinh dự thi của trường THCS A y (em) là số lượng học sinh dự thi của trường THCS B. (Với $x + y > 72; x, y \in \mathbb{N}^*$).	0,25
	Ta có $(x + y) \cdot \frac{56,25}{100} = 72 \Leftrightarrow x + y = 128$.	0,25
	và $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 72$.	0,25
	Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 128 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 72 \end{cases}$	0,25
	Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 48 \\ y = 80 \end{cases}$ Ta thấy x, y thỏa mãn điều kiện.	0,25
	Số học sinh dự thi của trường THCS A là 48 học sinh. Số học sinh dự thi của trường THCS B là 80 học sinh.	0,25
5	Áp dụng bất đẳng thức $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a; b \geq 0$), dấu “=” xảy ra khi $a = b$ ta có: $(a - 6)^2 + 9 \geq 2\sqrt{9(a - 6)^2} = 6 a - 6 \geq 6(a - 6)$.	0,25

		$(b-2)^2 + 16 \geq 2\sqrt{16(b-2)^2} = 8 b-2 \geq 8(b-2).$	
		$\Rightarrow (a-6)^2 + (b-2)^2 + 25 \geq 6(a-6) + 8(b-2)$ $\Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-2)^2 \geq 2(3a+4b) - 77 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-2)^2 \geq 25$ $\Rightarrow \sqrt{(a-6)^2 + (b-2)^2} \geq 5.$ Vậy $P \geq 5.$	0,25
		$\begin{cases} (a-6)^2 = 9 \\ (b-2)^2 = 16 \\ a-6 = a-6 \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=6 \end{cases} \\ b-2 = b-2 \\ 3a+4b=51 \end{cases}$ Đẳng thức xảy ra khi	0,25
		Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{(a-6)^2 + (b-2)^2}$ bằng 5 khi $\begin{cases} a=9 \\ b=6 \end{cases}$	0,25
6	a	Hình vẽ 	0,25
		Do $\triangle ABC$ cân tại A ; E là điểm đối xứng của C qua AB ; F là điểm đối xứng của B qua AC nên: $BE = CF = BC$ và $CE = BF$.	0,25
		Do đó $\triangle EBC = \triangle FCB$ (c-c-c) $\Rightarrow \angle BEC = \angle CFB$.	0,25
		Khi đó tứ giác $EBCF$ nội tiếp đường tròn (hai đỉnh kề nhau nhìn hai đỉnh còn lại dưới một góc bằng nhau). Tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $EBCF$ là điểm A (do tính đối xứng và $\triangle ABC$ cân tại A).	0,25

b	 Dựng đúng các trọng tâm G_1, G_2, G_3.	0,25
	Gọi M là trung điểm của cạnh BC thì M thuộc EG_1 .	0,25
	Vì BC là cạnh chung của ba tam giác EBC, FBC, ABC nên M thuộc FG_2 và AG_3 .	0,25
	Vậy các đường thẳng EG_1, FG_2 và AG_3 đồng quy tại trung điểm M của BC .	0,25
c		
	Theo định lí Thalet đảo ta có $\frac{MG_1}{ME} = \frac{MG_3}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_3 \parallel EA$; $\frac{MG_2}{MF} = \frac{MG_3}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_2G_3 \parallel FA$; $\frac{MG_1}{ME} = \frac{MG_2}{MF} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel EF$. Từ đó suy ra $\Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta EFA$ (c-c-c) theo tỉ số đồng dạng $\frac{1}{3}$.	0,25
	Gọi H là giao điểm của AM và EF. Theo tính chất đối xứng ta có AH là trung trực của EF. Xét ΔEAH vuông tại H và có $\angle EAH = 60^\circ$ (do ΔEAF cân tại A và $\angle EAF = 120^\circ$).	0,25

Trang 5/6



	Khi đó $EH = EA \cdot \sin 60^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ($EA = AB = a$) $\Rightarrow EF = 2EH = a\sqrt{3}$; $AH = \sqrt{AE^2 - EH^2} = \frac{a}{2}$.	
	Ta có $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.	0,25
	Do $\frac{S_{\triangle G_1G_2G_3}}{S_{\triangle EFG}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\triangle G_1G_2G_3} = \frac{1}{9} S_{\triangle EFG} = \frac{a^2\sqrt{3}}{36}$.	0,25
7	Đặt $\sqrt{519 - a^2 - 2a} + 3 = (2b+1)^2$ ($b \in \mathbb{Z}$). Ta có: $\sqrt{520 - (a+1)^2} + 3 = (2b+1)^2$	0,25
	$\Rightarrow (2b+1)^2 \leq \sqrt{520} + 3 \Rightarrow (2b+1)^2 \leq 25$ $\Rightarrow -5 \leq 2b+1 \leq 5 \Leftrightarrow -3 \leq b \leq 2$ $\Rightarrow b \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.	0,25
	Nhận xét: $b=0; b=-1$ thì không tồn tại a nguyên, thay các giá trị còn lại của b ta cần giải các trường hợp: $\begin{cases} \sqrt{519 - a^2 - 2a} + 3 = 25 \\ \sqrt{519 - a^2 - 2a} + 3 = 9 \end{cases}$	0,25
	Giải ra ta được $a \in \{21; -23; 5; -7\}$.	0,25

(<https://s.shopee.vn/6f>)

Hết.

