

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH BÀ RỊA VŨNG TÀU năm học 2024-2025

Câu 1 (3,0 điểm):

- 1) Rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}$ với $0 < x \neq 1$.
- 2) Tính giá trị biểu thức $A = x^3 - 3x^2 + 2035$ với $x = 1 - \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{77}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{77}}{2}}$.

Câu 2 (3,0 điểm):

- 1) Giải phương trình $(2x - 3)\sqrt{x + 2} = x^2 - 2x + 2$.
- 2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x + y) = 2 \\ x^3 + y^3 + 6 = 8x^2y^2 \end{cases}$.

Câu 3 (3,0 điểm):

- 1) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(m; n)$ thỏa mãn $9^m + 4 = n(2n + 7)$.
- 2) Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn $(1 + ab)p^2 + (a^2 - b^2 - b)p = a(1 + b)$.

Câu 4 (4,0 điểm):

- 1) Cho phương trình ẩn $x: x^2 + (m + 1)x + 2m - 3 = 0$ (1). Tìm tất cả giá trị tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $\sqrt{x_1^2 + 2024} - x_1 = x_2 + \sqrt{x_2^2 + 2024}$.
- 2) Cho các số thực a, b, c thay đổi sao cho $1 \leq a, b, c \leq 2$ và $abc \leq 4$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{a}{b^2 + 5} + \frac{b}{c^2 + 5} + \frac{c}{a^2 + 5}$.

Câu 5 (5 điểm): Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên đoạn OA lấy điểm C sao cho $AC = \frac{2}{3}R$. Đường thẳng qua C và vuông góc OA cắt (O) tại điểm D . Trên cung BD lấy điểm M (M khác B và D). Hai tiếp tuyến của (O) tại M và B có giao điểm K , KM cắt CD tại điểm E . Kẻ MH vuông góc với AB tại H , AM cắt CD tại F và AK cắt MH tại J .

- 1) Chứng minh $\triangle MEF$ cân. Tính giá trị nhỏ nhất của $3AF + MF$ khi M di động trên cung BD .
- 1) Chứng minh J là trung điểm của đoạn MH .
- 2) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle FMD$ thuộc BD . Tìm vị trí M để tứ giác $MDFO$ nội tiếp.

Câu 6 (2,0 điểm): Cho tam giác ABC vuông tại A , $AC = 2AB$. Gọi $(B), (C)$ lần lượt là các đường tròn tâm B, C và cùng đi qua A . (B) và (C) còn cắt nhau tại điểm D khác A . Hai điểm M, N lần lượt di động trên cung lớn AD của $(B), (C)$ sao cho $\angle MAN = 30^\circ$. Gọi P là giao điểm của hai tia BM, CN . Chứng minh rằng:

- 1) Số đo $\angle BPC$ không đổi.
- 2) Đường tròn ngoại tiếp $\triangle PMN$ luôn đi qua một điểm cố định.

Đáp án

Câu 1:

1. Rút gọn biểu thức : $P = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}$ với $0 < x \neq 1$.

2. Tính giá trị biểu thức : $A = x^3 - 3x^2 + 2035$ với $x = 1 - \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{77}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{77}}{2}}$.

Giải

1. $P = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{1}{x - 1}$.

2. Đặt $a = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{77}}{2}}; b = \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{77}}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = 9 \\ ab = 1 \end{cases}$.

Ta có : $1 - x = a + b \Rightarrow (1 - x)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 9 + 3(1 - x)$

$\Rightarrow 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = 9 + 3 - 3x \Rightarrow x^3 - 3x^2 = -11 \Rightarrow A = 2024$.

Câu 2

1. Giải phương trình : $(2x - 3)\sqrt{x + 2} = x^2 - 2x + 2$.

2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy(x + y) = 2 \\ x^3 + y^3 + 6 = 8x^2y^2 \end{cases}$.

Giải :

1. Điều kiện : $x \geq -2$.

Phương trình $\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 8 = 4(2x - 3)\sqrt{x + 2} \Leftrightarrow (4x^2 - 12x + 9) - 4(2x - 3)\sqrt{x + 2} + 4(x + 2) = 9$

$\Leftrightarrow (2x - 3 - 2\sqrt{x + 2})^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 - 2\sqrt{x + 2} = 3 \\ 2x - 3 - 2\sqrt{x + 2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + 2} = x \\ \sqrt{x + 2} = x \end{cases}$ Ta có

: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x + 2 = (x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7 + \sqrt{21}}{2}$.

Và (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$. Vậy tập nghiệm phương trình là : $S = \left\{ 2; \frac{7 + \sqrt{21}}{2} \right\}$.

2. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x + y) = 2 \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y) + 6 = 8x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x + y) = 2 \\ (x + y)^3 = 8x^2y^2 \end{cases}$

Để thấy $xy \neq 0$ và $x + y = \frac{2}{xy}$. Từ đây thu được $\frac{8}{x^3y^3} = 8x^2y^2 \Leftrightarrow xy = 1$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x(2-x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy tập hợp nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(1;1)\}$.

Bài 3

1. Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(m;n)$ thỏa mãn : $9^n + 4 = n(2n+7)$.
2. Tìm tất cả số tự nhiên a,b sao cho tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn đẳng thức :

$$(1+ab)p^2 + (a^2 - b^2 - b)p = a(1+b).$$

Giải :

1. Ta có : $9^n = 2n^2 + 7n - 4 = (2n-1)(n+4)$. Do $2n-1$ và $n+4$ đều là các số nguyên dương nên tồn tại hai số tự nhiên u,v sao cho $\begin{cases} 2n-1=3^u \\ n+4=3^v \end{cases}$.

$$\Rightarrow 2.3^v = 2n+8 = 9+3^u > 9 \Rightarrow v \geq 2.$$

$$\text{Nếu } v=2 \Rightarrow u=2 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=5 \end{cases}.$$

Nếu $v \geq 3 \Rightarrow 3^* = 2.3^v - 9 > 9 \Rightarrow u \geq 3$. Tuy nhiên đến đây thì $9 = 2.3^v - 3^* : 3^3$ (vô lý).

Vậy có duy nhất cặp số nguyên dương $(m;n)$ thỏa mãn điều kiện là $(2;5)$.

2. Ta có : $p^2 + abp^2 + a^2p - b(b+1)p - a(b+1) = 0 \Leftrightarrow p^2 + ap(bp+a) - (b+1)(bp+a) = 0$
 $\Leftrightarrow p^2 = (bp+a)(b+1-ap)$.

Nếu $a=0 \Rightarrow p=b(b+1) > 0 \Rightarrow b > 0$. Khi đó $b+1 > 1$ là ước của số nguyên tố $p \Rightarrow \begin{cases} b+1=p \\ b=1 \end{cases}$. Từ đây ta được $a=0; b=1; p=2$.

Nếu $a \geq 1 \Rightarrow b+1-ap > 0 \Rightarrow b > ap-1 \geq p-1 \geq 1 \Rightarrow b \geq 2$. Khi đó $bp+a > p$ là và ước số của p^2 . Do đó ta phải có $\begin{cases} bp+a=p^2 \\ b+1-ap=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=ap \\ ap^2+a=p^2 \end{cases}$ (không xảy ra vì $a \geq 1$).

Vậy chỉ duy nhất $a=0; b=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4 (4,0 điểm).

1. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + (m+1)x + 2m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn : $\sqrt{x_1^2 + 2024} - x_1 = x_2 + \sqrt{x_2^2 + 2024}$.

2. Các số thực a, b, c thay đổi thỏa mãn $1 \leq a \leq 2; 1 \leq b \leq 2; 1 \leq c \leq 2; abc \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức : } S = \frac{a}{b^2 + 5} + \frac{b}{c^2 + 5} + \frac{c}{a^2 + 5}.$$

Giải :

1. Ta có $\Delta = (m+1)^2 - 4(2m-3) = m^2 - 6m + 13 = (m-3)^2 + 4 > 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

$$\text{Theo hệ thức Vi - ét, ta được } \begin{cases} x_1 + x_2 = -m-1 \\ x_1 x_2 = 2m-3 \end{cases}.$$

Để thấy $(\sqrt{x_1^2 + 2024} - x_1)(\sqrt{x_1^2 + 2024} + x_1) = (x_2 + \sqrt{x_2^2 + 2024})(\sqrt{x_2^2 + 2024} - x_1) = 2024$ nên từ đề bài ta được $\begin{cases} \sqrt{x_1^2 + 2024} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2024} + x_2 \\ \sqrt{x_1^2 + 2024} + x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2024} - x_2 \end{cases}$. Từ đây thu được $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

$$2. \text{ Ta có } (b-1)^2(b-2) \leq 0 \Rightarrow b^3 - 4b^2 + 5b - 2 \leq 0 \Rightarrow (b^2 + 5)(4-b) \geq 18 \Rightarrow \frac{a}{b^2 + 5} \leq \frac{a(4-b)}{18}.$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } \frac{b}{c^2 + 5} \leq \frac{b(4-c)}{18}; \frac{c}{a^2 + 5} \leq \frac{c(4-a)}{18}.$$

$$\text{Do đó } 18S \leq a(4-b) + b(4-c) + c(4-a) = 4(a+b+c) - (ab+bc+ca)$$

$$\text{Từ giả thiết ta thấy } 3(2-a)(2-b)(2-c) + 4(a-1)(b-1)(c-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow 3(8 - 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) - abc) + 4(abc - (ab+bc+ca) + a+b+c-1) \geq 0$$

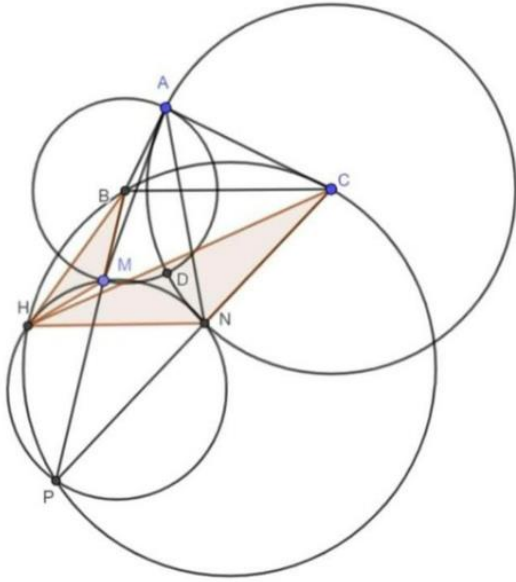
$$\Rightarrow 8(a+b+c) - 2(ab+bc+ca) \leq abc + 20 \leq 24 \Rightarrow 4(a+b+c) - (ab+bc+ca) \leq 12.$$

Như vậy $S \leq \frac{2}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là một trong ba bộ $(1; 2; 2); (2; 1; 2); (2; 2; 1)$. Vậy

giá trị lớn nhất của biểu thức là $\frac{2}{3}$.

Bài 5(5,0 điểm).

Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên đoạn OA lấy điểm C sao cho $AC = \frac{2}{3}R$. Đường thẳng qua C và vuông góc OA cắt (O) tại điểm D . Trên cung BD lấy điểm M (M khác B và D). Hai tiếp tuyến của (O) tại M và B có giao điểm K , KM cắt CD tại điểm E . Kẻ MH vuông góc với AB tại H , AM cắt CD tại F và AK cắt MH tại J .



1. Ta có : $BPC = BMA + CNA - MAN = BAM + CAN - MAN = BAC - 2MAN = 30^\circ$.

2. Gọi H là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC và đường tròn ngoại tiếp tam giác $PMN(HP)$. Dễ thấy P và H nằm khác phía với A so với đường thẳng BC và $BPC = 30^\circ$ nên đường tròn (T_1) ngoại tiếp tam giác PBC là một đường tròn cố định.

Ta thấy hai tam giác HMB, HNC đồng dạng nên $\frac{HB}{HC} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$. Đến đây ta vẽ phân giác trong và phân giác ngoài của BHC lần lượt cắt đường thẳng BC tại E, F thì E nằm giữa B, C còn F nằm ngoài đoạn BC nhưng theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{EB}{EC} = \frac{FB}{FC} = \frac{1}{2} \Rightarrow E, F$ là hai điểm cố định. Dễ thấy khi đó $HE \perp HF$ nên H nằm trên đường tròn (T_2) đường kính EF cố định.

Như vậy H chính là giao điểm của hai đường tròn cố định $(T_1), (T_2)$ và nằm khác phía điểm A so với $BC \Rightarrow H$ cố định. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN đi qua điểm H cố định.