

# HSGS T9 Tỉnh Quảng Ngãi 21 22

## Câu 1.(4,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố khác nhau  $(a;b;c)$  sao cho  $a.b.c = 3(a+b+c)$ .
- 2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên  $x, y$  của phương trình  $4x^2 + 5y^2 + 8x = 37$ .
- 3) Chứng minh rằng  $x^3 + 2021x$  chia hết cho 6 (với  $x \in \mathbb{Z}$ ).

## Câu 2.(4,0 điểm)

- 1) Giải phương trình:  $x^2 + 2020x - 2019 = 2\sqrt{2022x - 2021}$ .

2) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} xy + x + y = 3 \\ \frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{1}{y^2 + 2y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

## Câu 3.(4,0 điểm)

1) Cho biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$ .

a) Rút gọn biểu thức  $A$ .

b) Cho  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $A$ .

2) Cho  $x, y, z$  là các số thực thỏa mãn điều kiện  $x + y + z + xy + yz + zx = 6$ . Chứng minh bất đẳng thức  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ .

## Câu 4.(7,0 điểm)

1) Một em học sinh có tờ giấy màu hình tam giác  $ABC$  có  $AB = 3\text{cm}$ ;  $AC = 4\text{cm}$ ;  $BC = 5\text{cm}$ . Em muốn cắt ra hình chữ nhật  $MNPQ$  sao cho  $M, N$  thuộc cạnh  $BC$ ,  $P$  thuộc cạnh  $AC$ ,  $Q$  thuộc cạnh  $AB$ . Hãy xác định các kích thước của hình chữ nhật  $MNPQ$  để tờ giấy màu cắt ra có diện tích lớn nhất.

2) Cho 3 điểm  $A, B, C$  cố định nằm trên một đường thẳng  $d$  ( $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ ). Vẽ đường tròn tâm  $O$  thay đổi nhưng luôn đi qua  $B$  và  $C$  ( $O$  không nằm trên đường thẳng  $d$ ). Kẻ  $AM$  và  $AN$  là các tiếp tuyến với đường tròn tâm  $O$  ( $M$  và  $N$  là tiếp điểm). Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ ,  $AO$  cắt  $MN$  tại  $H$  và cắt đường tròn tại các điểm  $P$  và  $Q$  ( $P$  nằm giữa  $A$  và  $O$ ),  $BC$  cắt  $MN$  tại  $K$ .

a) Chứng minh 5 điểm  $O, M, A, N, I$  cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh điểm  $K$  cố định khi đường tròn tâm  $O$  thay đổi.

c) Gọi  $D$  là trung điểm  $HQ$ , từ  $H$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $MD$  cắt đường thẳng  $MP$  tại  $E$ .

## Câu 5.(1,0 điểm)

Trong một tam giác có cạnh lớn nhất bằng 2022 đơn vị, người ta lấy 9 điểm phân biệt. Chứng minh rằng luôn tìm được ba điểm tạo thành tam giác có chu vi không vượt quá 3033 đơn vị.

### HƯỚNG DẪN GIẢI

#### Câu 1.(4,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố khác nhau  $(a; b; c)$  sao cho  $a \cdot b \cdot c = 3(a + b + c)$ .
- 2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên  $x, y$  của phương trình  $4x^2 + 5y^2 + 8x = 37$ .
- 3) Chứng minh rằng  $x^3 + 2021x$  chia hết cho 6 (với  $x \in \mathbb{Z}$ ).

#### Lời giải

1) Do  $a, b, c$  là các số nguyên tố khác nhau; giả sử  $2 \leq a < b < c$ .

Vì  $a \cdot b \cdot c = 3(a + b + c) \Rightarrow abc : 3$ . Mà  $a, b, c$  nguyên tố nên một trong ba số  $a, b, c$  phải có một số chia hết cho 3. Nếu  $a = 3$  thì  $(b-1)(c-1) = 4$  vô lý. Nếu  $c = 3$  thì vô lý  $a$  và  $b$  nguyên tố. nên  $b : 3$  và  $b$  nguyên tố nên  $b = 3$ .

Với  $b = 3$ , ta có  $3ac = 3(a + c + 3) \Leftrightarrow ac = a + c + 3$

$$\Leftrightarrow (a-1)(c-1) = 4 \Rightarrow \begin{cases} a-1=1 \\ c-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=2; c=5$$

Vậy  $(a; b; c) = (2; 3; 5)$ .

Hoán vị bộ 3 số này ta có tất cả các bộ 3 số khác nhau thỏa mãn điều kiện  $a \cdot b \cdot c = 3(a + b + c)$

2) Ta có  $4x^2 + 5y^2 + 8x = 37 \Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1) = 41 - 5y^2$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 = 41 - 5y^2 \Rightarrow (41 - 5y^2) : 2 \Leftrightarrow y^2 \text{ là số nguyên lẻ.}$$

Mà  $4(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow 41 - 5y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \in \{1; 3; 5; 7\}$  suy ra  $y^2 = 1$ . Từ đó tìm được  $x = 2, x = -4$ .

Thử lại và trả lời các nghiệm  $(2, 1); (2, -1); (-4, 1); (-4, -1)$ .

3) Ta có:  $x^3 + 2021x = x(x^2 - 1) + 2022x = (x-1)x(x+1) + 2022x$ .

Mà  $(x-1)x(x+1) : 6$  (tích 3 số nguyên liên tiếp) và  $2022x : 6$  (do  $2022 : 6$ ).

Nên  $(x-1)x(x+1) + 2022x : 6$ . Hay  $(x^3 + 2021x) : 6 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$ .

#### Câu 2.(4,0 điểm)

1) Giải phương trình:  $x^2 + 2020x - 2019 = 2\sqrt{2022x - 2021}$ .

2) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} xy + x + y = 3 \\ \frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{1}{y^2 + 2y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

**Lời giải**

1)  $x^2 + 2020x - 2019 = 2\sqrt{2022x - 2021}$ . Điều kiện  $x \geq \frac{2021}{2022}$ .

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 2x + 1 + 2022x - 2021 - 2\sqrt{2022x - 2021} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{2022x - 2021} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{2022x - 2021} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2022x - 2021 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy  $x=1$  là nghiệm của phương trình đã cho.

2)

Điều kiện  $\begin{cases} x^2 + 2x \neq 0 \\ y^2 + 2y \neq 0 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} xy + x + y = 3 \\ \frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{1}{y^2 + 2y} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) = 4 \\ \frac{1}{(x+1)^2 - 1} + \frac{1}{(y+1)^2 - 1} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Đặt  $u = x+1, v = y+1$

Hệ phương trình trở thành  $\begin{cases} uv = 4 \\ \frac{1}{u^2 - 1} + \frac{1}{v^2 - 1} = \frac{2}{3} \end{cases}$  Điều kiện  $\begin{cases} u \neq \pm 1 \\ v \neq \pm 1 \end{cases} (*)$

Khi đó  $\begin{cases} uv = 4 \\ 3(u^2 + v^2 - 2) = 2(u^2v^2 - u^2 - v^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 4 \\ u^2 + v^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 4 \\ u + v = \pm 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v = 2 \\ u = v = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình là  $(1;1);(-3;-3)$ .

1) Cho biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$ .

a) Rút gọn biểu thức  $A$ .

b) Cho  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $A$ .

2) Cho  $x, y, z$  là các số thực thoả mãn điều kiện  $x + y + z + xy + yz + zx = 6$ . Chứng minh bất đẳng thức  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ .

### Lời giải

1)

a) Điều kiện:  $x > 0; y > 0; \sqrt{xy} \neq 1$

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \\ &: \frac{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})} \\ &= \frac{\sqrt{x} - x\sqrt{y} + 1 - \sqrt{xy} + xy + \sqrt{xy} + x\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{xy} - xy + 1 - \sqrt{xy}}{\sqrt{xy} - xy + 1 - \sqrt{xy} + xy + \sqrt{xy} + x\sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{x} + x\sqrt{y} - 1 + \sqrt{xy}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{x}}{x\sqrt{y} + \sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{xy}} \end{aligned}$$

Vậy với  $x > 0; y > 0; \sqrt{xy} \neq 1$  thì  $A = \frac{1}{\sqrt{xy}}$ .

1b) Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}} \Leftrightarrow 6 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq 9$ .

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} = 3 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{9}$ . Vậy  $\max A = 9$  khi  $x = y = \frac{1}{9}$ .

2) Ta có  $x^2 + 1 \geq 2x; y^2 + 1 \geq 2y; z^2 + 1 \geq 2z$  với mọi  $x, y, z$

Do  $x^2 + y^2 \geq 2xy; y^2 + z^2 \geq 2yz; z^2 + x^2 \geq 2zx$  với mọi  $x, y, z$ .

Cộng các bất đẳng thức trên về theo về ta được:

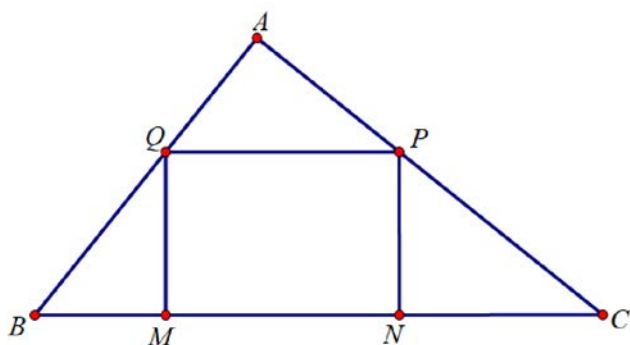
$$\begin{aligned}
& 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3 \geq 2(x + y + z + xy + yz + zx) \\
& \Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3 \geq 12 \quad (\text{vì } x + y + z + xy + yz + zx = 6) \\
& \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3
\end{aligned}$$

**Câu 4.(7,0 điểm)**

- 1) Một em học sinh có tờ giấy màu hình tam giác  $ABC$  có  $AB = 3\text{ cm}$ ;  $AC = 4\text{ cm}$ ;  $BC = 5\text{ cm}$ . Em muốn cắt ra hình chữ nhật  $MNPQ$  sao cho  $M, N$  thuộc cạnh  $BC$ ,  $P$  thuộc cạnh  $AC$ ,  $Q$  thuộc cạnh  $AB$ . Hãy xác định các kích thước của hình chữ nhật  $MNPQ$  để tờ giấy màu cắt ra có diện tích lớn nhất.
- 2) Cho 3 điểm  $A, B, C$  cố định nằm trên một đường thẳng  $d$  ( $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ ). Vẽ đường tròn tâm  $O$  thay đổi nhưng luôn đi qua  $B$  và  $C$  ( $O$  không nằm trên đường thẳng  $d$ ). Kẻ  $AM$  và  $AN$  là các tiếp tuyến với đường tròn tâm  $O$  ( $M$  và  $N$  là tiếp điểm). Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ ,  $AO$  cắt  $MN$  tại  $H$  và cắt đường tròn tại các điểm  $P$  và  $Q$  ( $P$  nằm giữa  $A$  và  $O$ ),  $BC$  cắt  $MN$  tại  $K$ .
- a) Chứng minh 5 điểm  $O, M, A, N, I$  cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Chứng minh điểm  $K$  cố định khi đường tròn tâm  $O$  thay đổi.
- c) Gọi  $D$  là trung điểm  $HQ$ , từ  $H$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $MD$  cắt đường thẳng  $MP$  tại  $E$ . Chứng minh  $P$  là trung điểm  $ME$ .

**Lời giải**

1)



Tam giác  $ABC$  có  $AB = 3\text{ cm}$ ;  $AC = 4\text{ cm}$ ;  $BC = 5\text{ cm}$ . Nên là tam giác vuông tại  $A$  (Định lý Pytago đảo).

Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $BC$  và  $PQ$ .

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông tại } A \text{ nên } AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12}{5} \text{ cm}$$

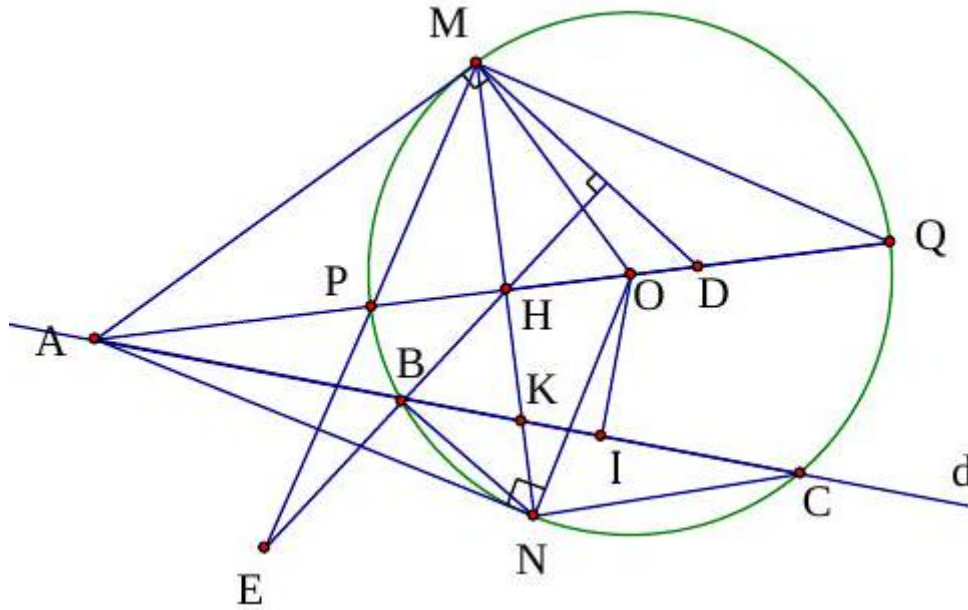
Đặt  $PN = x, PQ = y$ . Vì  $\triangle APQ$  đồng dạng  $\triangle ACB$  suy ra

$$\frac{PQ}{CB} = \frac{AK}{AH} = \frac{AH - x}{AH} = 1 - \frac{x}{AH} \Leftrightarrow \frac{y}{5} = 1 - \frac{x}{12} \Rightarrow y = 5 - \frac{25}{12}x$$

$$S_{MNPQ} = x \cdot y = 5x - \frac{25}{12}x^2 = 3 - \frac{25}{12}\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 \leq 3.$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $S_{MNPQ}$  bằng 3 khi  $x = \frac{6}{5}$  cm và  $y = \frac{5}{2}$  cm

2.



a) Do I là trung điểm của BC (dây BC không đi qua O)  $\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow \widehat{OIA} = 90^\circ$ .

Ta có  $\widehat{AMO} = 90^\circ$  (do AM là tiếp tuyến (O)),

$\widehat{ANO} = 90^\circ$  (do AN là tiếp tuyến (O))

Suy ra 5 điểm O, M, A, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA.

b) Vì AM, AN là hai tiếp tuyến (O) cắt nhau tại A nên OA là tia phân giác  $\widehat{MON}$  mà  $\triangle OMN$  cân tại O nên  $OA \perp MN$ . Ta có  $\triangle ABN$  đồng dạng  $\triangle ANC$  (vì  $\widehat{ANB} = \widehat{ACN} = \frac{1}{2}$  số  $\widehat{NB}$  và  $\widehat{CAN}$  chung) suy ra  $\frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AN^2$ .

$$\frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AN^2.$$

Ta có  $\triangle ANO$  vuông tại N đường cao NH nên ta có  $AH \cdot AO = AN^2$

Suy ra  $AB \cdot AC = AH \cdot AO$ .

Ta có  $\triangle AHK$  đồng dạng  $\triangle AIO$  (vì  $\widehat{AHK} = \widehat{AIO} = 90^\circ$  và  $\widehat{OAI}$  chung)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AI \cdot AK = AH \cdot AO \Rightarrow AI \cdot AK = AB \cdot AC$$

$\Rightarrow AK = \frac{AB \cdot AC}{AI}$ . Ta có  $A, B, C$  cố định nên  $I$  cố định suy ra  $AK$  không đổi; mà  $A$  cố định và  $K$  thuộc  $BC$  suy ra  $K$  cố định.

c) Ta có  $\widehat{PMQ} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét  $\triangle MHE$  và  $\triangle QDM$  có  $\widehat{MEH} = \widehat{DMQ}$  (cùng phụ với  $\widehat{DMP}$ ),  $\widehat{EMH} = \widehat{MQD}$  (cùng phụ với  $\widehat{MPO}$ ). Vậy  $\triangle MHE$  đồng dạng  $\triangle QDM \Rightarrow \frac{ME}{MQ} = \frac{MH}{DQ}$

Ta có  $\triangle PMH$  đồng dạng  $\triangle MQH$  (Vì  $\widehat{MPH} = \widehat{QMH}$ ;  $\widehat{MHP} = \widehat{QHM} = 90^\circ$ )

$$\Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{HQ} = \frac{MH}{2DQ} \Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{1}{2} \frac{ME}{MQ}$$

$$\Rightarrow ME = 2MP \Rightarrow P \text{ là trung điểm } ME.$$

#### Câu 5. (1,0 điểm)

Trong một tam giác có cạnh lớn nhất bằng 2022 đơn vị, người ta lấy 9 điểm phân biệt. Chứng minh rằng luôn tìm được ba điểm tạo thành tam giác có chu vi không vượt quá 3033 đơn vị.

#### Lời giải

Giả sử tam giác đã cho là tam giác  $ABC$  có cạnh lớn nhất bằng 2022 đơn vị. Chia tam giác đã cho thành 4 tam giác không có điểm trong chung bằng việc vẽ các đường trung bình của nó. Khi đó cạnh lớn nhất trong các tam giác nhỏ bằng 1011 đơn vị. Lấy 9 điểm phân biệt nằm tam giác đã cho, nghĩa là nằm trong 4 hình tam giác nhỏ, theo nguyên tắc Dirichlet phải tồn tại ít nhất 3 điểm nằm trong cùng một tam giác nhỏ, mà tam giác này có chu vi không vượt quá 3033 đơn vị. Vì vậy 3 điểm này tạo thành tam giác có chu vi không vượt quá 3033 đơn vị.