

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Bài 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a} \quad (a \neq b)$$

a) Rút gọn biểu thức B

b) Tính giá trị của $B = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right)$ khi $a = 7 - 4\sqrt{3}$

và $b = 7 + 4\sqrt{3}$

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (m là tham số)

a) Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có hai nghiệm phân biệt dương

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để biểu thức

$$M = \frac{-2022}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất}$$

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

b) Chứng minh rằng $A = a^7 - a$ chia hết cho 7, với mọi $a \in \mathbb{Z}$

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), M là trung điểm BC ; BE, CF là các đường cao (E, F là chân các đường cao). Các tiếp tuyến với đường tròn tại B và C cắt nhau tại S. Gọi N, P lần lượt là giao điểm của BS với EF, AS với (O) ($P \neq A$). Chứng minh rằng :

a) $MN \perp BF$

b) $AB \cdot CP = AC \cdot BP$

c) $\angle CAM = \angle BAP$

ĐÁP ÁN

Bài 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a} \quad (a \neq b)$$

c) Rút gọn biểu thức B

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a} \quad (a \neq b) \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} : \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} + \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{-\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{-\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 0 \end{aligned}$$

d) Tính giá trị của B $= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right)$ **khí** $a = 7 - 4\sqrt{3}$

và $b = 7 + 4\sqrt{3}$

$$a = 7 - 4\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{a} = 2 - \sqrt{3}; b = 7 + 4\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{b} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) = \dots = \frac{-\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 2 - 2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (**m** là tham số)

c) Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có hai nghiệm phân biệt dương

Để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt thì :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m)^2 - 1(m-2) > 0 \\ 2m > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow m > 2$$

Vậy $m > 2$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt dương

d) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để biểu thức

$$M = \frac{-2022}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất}$$

Vì $\Delta' > 0 \Rightarrow (1)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

$$\text{Theo Vi-et : } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}$$

$$M = \frac{-2022}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2} = \frac{-2022}{(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2} = \frac{-2022}{(2m)^2 - 8(m - 2)}$$

$$= \frac{-2022}{4(m - 1)^2 + 12} \geq \frac{-2022}{12} = \frac{-337}{2}$$

$$\text{Vậy } \min M = \frac{-337}{2} \Leftrightarrow m = 1$$

Bài 3. (2,0 điểm)

c) Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1 (x \in \mathbb{R})$

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1 (x \in \mathbb{R}) (0 \leq x \leq 1). \begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{1-x} \end{cases} (a, b \geq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + ab = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + ab = 1 \\ (a + b)^2 - 2ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} (tm)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \end{cases} (ktm)$$

$$\text{Vậy } S = \{0; 1\}$$

d) Chứng minh rằng $A = a^7 - a$ chia hết cho 7, với mọi $a \in \mathbb{Z}$

$$\text{Với mọi } a \in \mathbb{Z} \text{ ta có : } A = a^7 - a = a(a^3 - 1)(a^3 + 1)$$

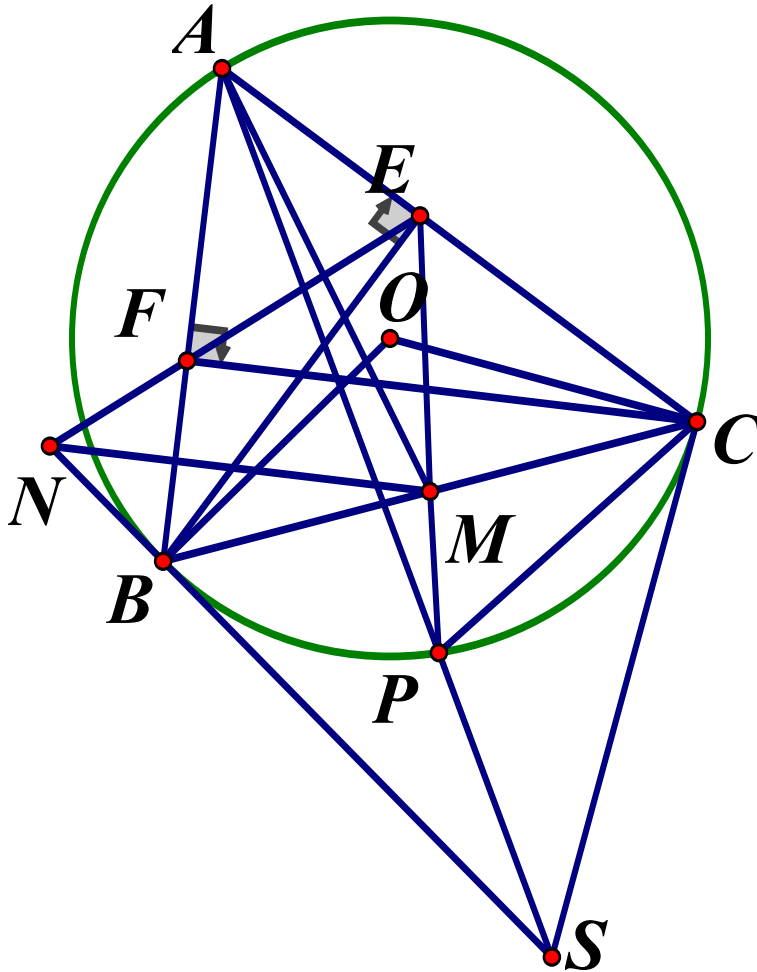
$$\text{Nếu } a \equiv 7 \Rightarrow A \equiv 7$$

$$\text{Nếu } a \text{ không chia hết cho } 7 \text{ thì } a \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod{7} \Rightarrow a^3 \equiv 1, 6 \pmod{7} \Rightarrow \begin{cases} a^3 - 1 \equiv 0 \pmod{7} \\ a^3 + 1 \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A \equiv 0 \pmod{7} \text{ với mọi } a \in \mathbb{Z}$$

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , M là trung điểm BC ; BE, CF là các đường cao (E, F là chân các đường cao). Các tiếp tuyến với đường tròn tại B và C cắt nhau tại S . Gọi N, P lần lượt là giao điểm của BS với EF, AS với (O) ($P \neq A$). Chứng minh rằng :



a) $MN \perp BF$

Ta có $\triangle BEC$ vuông tại E có EM là trung tuyến nên $EM = \frac{BC}{2} = MB = MC$

$\Rightarrow \triangle MEC$ cân tại $M \Rightarrow \angle MEC = \angle ACB$

Tứ giác $BFEC$ có $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính $BC \Rightarrow \angle FEA = \angle ABC$ (cùng bù với $\angle FEC$)

$\Rightarrow \angle MEN = 180^\circ - (\angle MEC + \angle FEA) = 180^\circ - (\angle ACB + \angle ABC) = \angle BAC$ (tổng ba góc trong $\triangle ABC$), ta lại có $\angle BAC = \angle CBS$ (cùng chắn cung BC) $\Rightarrow \angle MEN = \angle CBS (= \angle BAC)$

Mà $\angle MBN + \angle CBS = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \angle MEN + \angle MBN = 180^\circ$ nên tứ giác $BMEN$ nội tiếp nên $\angle BMN = \angle BEN$ (cùng chắn cung BN)

Vì $\angle BEN = \angle BCF$ (cùng chắn cung BF) $\Rightarrow \angle BMN = \angle BCF (= \angle BEN)$, hai góc này lại ở vị trí đồng vị nên $MN \parallel CF$. Do theo bài ta có $CF \perp BF \Rightarrow MN \perp BF$

$$b) AB.CP = AC.BP$$

Xét $\triangle SBP$ và $\triangle SAB$ có : $\angle S$ chung, $\angle SBP = \angle SAB$ (cùng chắn cung BP)

$$\Rightarrow \triangle SBP \sim \triangle SAB \Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{SB}{SA} \quad (1)$$

Xét $\triangle SCP$ và $\triangle SAC$ có: $\angle S$ chung; $\angle SCP = \angle SAC$ (cùng chắn cung CP)

$$\Rightarrow \triangle SCP \sim \triangle SAC (g.g) \Rightarrow \frac{CP}{AC} = \frac{SC}{SA} \quad (2)$$

Mà theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có : $SB = SC$ (3)

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có : } \frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC} \Rightarrow AB.CP = AC.BP$$

$$c) \angle CAM = \angle BAP$$

Vận dụng định lý Ptoleme, ta có tứ giác $ABPC$ nội tiếp (O)

$$\Rightarrow AP.BC = AB.CP + AC.BP$$

Theo câu b) thì $AB.CP = AC.BP \Rightarrow AP.BC = 2BP.AC \Rightarrow AP.2CM = 2BP.AC$

$$\Rightarrow AP.CM = BP.AC \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{CM}$$

Xét $\triangle BPA$ và $\triangle MCA$ có :

$$\angle BPA = \angle MCA \text{ (cùng chắn cung } AB); \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{CM} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle BPA \sim \triangle MCA (c.g.c) \Rightarrow \angle CAM = \angle BAP$$