

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT VÒNG TỈNH NĂM HỌC 2022 - 2023

Ngày thi: 13 tháng 10 năm 2022 (Buổi thi thứ hai)

Môn thi: TOÁN-Lớp: 12 THPT

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang, thí sinh không phải chép đề vào giấy thi)

Câu 1: (5,0 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 4y = 12x + 32 \\ y^3 + 2z = 12y + 24 \\ 3z^3 + 4x = 36z + 64 \end{cases}$$

Câu 2:

a) (2,5 điểm) Cho a, b, c, d là các số tự nhiên thoả mãn $a + b + c + d = 30$. Tìm dư của phép chia $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + 2022$ cho 30.

b) (2,5 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{cases} \text{ với } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_1 u_2 \dots u_n}$

Câu 3: (5,0 điểm)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ để biểu thức $P = \frac{x^2 y + x + y}{xy^2 + y + 7}$ là số nguyên dương.

Câu 4: (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng $2a$ và (d) là đường thẳng tùy ý cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F ($AE > AF$). Gọi α, β, φ lần lượt là góc giữa đường thẳng (d) với các đường thẳng BC, AB, AC . Tính giá trị của biểu thức $\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \varphi$

--- Hết ---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH

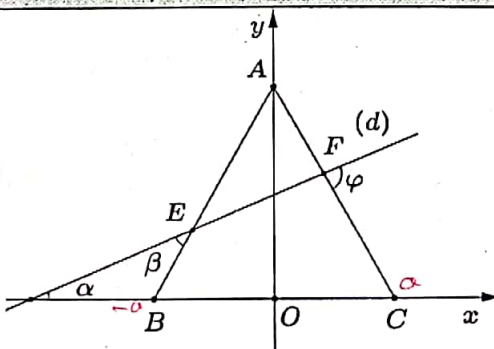
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT VÒNG TỈNH
NĂM HỌC 2022-2023

HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN: TOÁN-LỚP 12 THPT
(BUỔI THI THỨ HAI)

Câu/Ý	Nội dung diễn đạt	Thang điểm	Ghi chú
1	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 4y = 12x + 32 \\ y^3 + 2z = 12y + 24 \\ 3z^3 + 4x = 36z + 64 \end{cases}$	5,0	
	• Hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x^3 - 12x - 16 = 16 - 4y \\ y^3 - 12y - 16 = 8 - 2z \\ 3z^3 - 36z - 48 = 16 - 4x \end{cases}$	0,25 0,25 0,25	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x^2+4x+4) = 4(4-y) \\ (y-4)(y^2+4y+4) = 2(4-z) \\ 3(z-4)(z^2+4z+4) = 4(4-x) \end{cases}$	0,5 + 0,5 + 0,5 +	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+2)^2 = 4(4-y) & (1) \\ (y-4)(y+2)^2 = 2(4-z) & (2) \\ 3(z-4)(z+2)^2 = 4(4-x) & (3) \end{cases}$	0,5 0,5 0,5	
	• Nếu $x > 4$ thì từ (1) suy ra $y < 4$, (2) suy ra $z \geq 4$ (3) suy ra $x \leq 4$ (vô lý). • Nếu $x < 4$ thì từ (1) suy ra $y \geq 4$, (2) suy ra $z \leq 4$ (3) suy ra $x \geq 4$ (vô lý).	0,25	
	Vậy $x = 4$	0,25	
	• Tìm được $y = 4$	0,25	
	• Tìm được $y = 4$	0,25	
	Vậy hệ phương trình đã cho là $(x; y; z) = (4; 4; 4)$	0,25	
2	a) Cho a, b, c, d là các số tự nhiên thoả mãn $a+b+c+d=30$. Tìm dư của phép chia $a^5+b^5+c^5+d^5+2022$ cho 30.	2,50	
	• $a^5 - a = a(a^4 - 1) = (a-1)a(a+1)(a^2+1)$	0,25	
	• Do $(a-1)a(a+1)$ chia hết cho 2 và 3	0,25	
	• Do $(2; 3) = 1$ nên $(a-1)a(a+1)$ <u>chia hết cho 6</u>	0,25	

0,5

	• Nếu a chia cho 5 được dư 1; 0; 4 thì $(a-1)a(a+1)$ chia hết cho 5	0,25	
	• Nếu a chia cho 5 được dư là 2 thì $a^2 + 1 \equiv (a-2)(a+2) + 5$ chia hết cho 5	0,25	
	• Nếu a chia cho 5 được dư là 3 thì $a^2 + 1 \equiv (a-3)(a+3) + 10$ chia hết cho 5	0,25	
	• Do $(5; 6) = 1$ nên $a^5 - a$ chia hết cho 30	0,25	
	• Tương tự $b^5 - b; c^5 - c; d^5 - d$ chia hết cho 30	0,25	
	• $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + 2022$ $= (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c) + (d^5 - d) + 66 \cdot 30 + 12$	0,25	
	• Vậy dư của phép chia $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + 2022$ cho 30 là 12	0,25	
	b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{cases}$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_1 u_2 \dots u_n}$	2,5	
	• Do $u_{n+1} - 4 = (u_n^2 - 2)^2 - 4$	0,25	
	$= u_n^2 (u_n^2 - 4)$	0,25	
	$= \dots = (u_n u_{n-1} \dots u_1)^2 (u_1^2 - 4)$	0,25	
	$= 45 (u_n u_{n-1} \dots u_1)^2$	0,25	
	Suy ra: $\left(\frac{u_{n+1}}{u_1 u_2 \dots u_n} \right)^2 = 45 + \frac{4}{(u_1 u_2 \dots u_n)^2}$	0,25	
	• Ta chứng minh $u_n > 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ • Thật vậy $u_1 = 7 > 2$ • Giả sử $u_k > 2$ với mọi $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Ta có $u_{k+1} = u_k^2 - 2 > 2^2 - 2 = 2$ nên $u_n > 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	0,25	
	• Do $0 < \frac{4}{(u_1 u_2 \dots u_n)^2} < \frac{4}{2^{2n}}$ mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{2^{2n}} = 0$	0,25	
	nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{(u_1 u_2 \dots u_n)^2} = 0$	0,25	
	• Do đó: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_1 u_2 \dots u_n} \right)^2 = 45$	0,25	
	Suy ra: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_1 u_2 \dots u_n} = 3\sqrt{5}$	0,25	
3	Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ để biểu thức $P = \frac{x^2 y + x + y}{xy^2 + y + 7}$ là số nguyên dương.	5,0	

	Do P nguyên dương nên $x^2y + x + y$ chia hết cho $xy^2 + y + 7$. Suy ra $y(x^2y + x + y) - x(xy^2 + y + 7)$ chia hết cho $xy^2 + y + 7$	0,5	
	Từ đó ta có $y^2 - 7x$ chia hết cho $xy^2 + y + 7$	0,5	
	Nếu $y^2 - 7x > 0$ thì $y^2 - 7x < xy^2 + y + 7, \forall x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $y^2 - 7x$ không chia hết cho $xy^2 + y + 7$	0,5	
	Nếu $y^2 - 7x = 0$ thì $y^2 - 7x$ chia hết cho $xy^2 + y + 7$ nên $(x; y) = (7t^2; 7t), t \in \mathbb{N}^*$ thỏa yêu cầu bài toán	0,5	
	Nếu $y^2 - 7x < 0$ thì $7x - y^2 > 0$ và $7x - y^2$ chia hết cho $xy^2 + y + 7$ nên ta có $xy^2 + y + 7 \leq 7x - y^2 < 7x$ nên $x(y^2 - 7) + y + 7 < 0$. Suy ra $y \leq 2$	0,5	
	*Với $y = 1$. Ta có $P = \frac{x^2 + x + 1}{x + 8} = x - 7 + \frac{57}{x + 8}$	0,5	
	+ Tìm được $(x; y) = (11; 1), (x; y) = (49; 1)$	0,5	
	*Với $y = 2$. Ta có $P = \frac{2x^2 + x + 2}{4x + 9}$ nên $2P = x - \frac{7x - 4}{4x + 9}$	0,5	
	Do $2P$ nguyên nên $\frac{7x - 4}{4x + 9}$ nguyên, do đó $-4(7x - 4) + 7(4x + 9)$ chia hết cho $4x + 9$, suy ra 79 chia hết cho $4x + 9$ (vô nghiệm)	0,5	
	Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là $(7t^2; 7t), (t \in \mathbb{N}^*), (11; 1), (49; 1)$	0,5	
4	Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng $2a$ và (d) là đường thẳng tùy ý cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F ($AE > AF$). Gọi α, β, φ lần lượt là góc giữa đường thẳng (d) với các đường thẳng BC, AB, AC. Tính giá trị của biểu thức $\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \varphi$  Thiết lập hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ với O là trung điểm BC Đặt $\vec{u} = (u_1; u_2)$ là một vector của đường thẳng (d) $S = \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \varphi$	5,0	

• Tìm được $A(0; a\sqrt{3})$	0,25	
$B(-a; 0)$	0,25	
$C(a; 0)$	0,25	
• $\vec{i} = (1; 0)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng BC	0,25	
• $\vec{AB} = (-a; -a\sqrt{3})$ nên $\vec{m} = (1; \sqrt{3})$ là một vector chỉ phương của đường thẳng AB	0,25	
• $\vec{AC} = (a; -a\sqrt{3})$ nên $\vec{n} = (1; -\sqrt{3})$ là một vector chỉ phương của đường thẳng AC	0,25	
• Ta có $\cos \alpha = \frac{ u_1 }{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$	0,25	
$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{u_1^2}{u_1^2 + u_2^2}$	0,25	
Do đó $\sin^2 \alpha = \frac{u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}$	0,25	
• Ta có $\cos \beta = \frac{ u_1 + \sqrt{3}u_2 }{2\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$	0,25	
$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{(u_1 + \sqrt{3}u_2)^2}{4(u_1^2 + u_2^2)}$	0,25	
Do đó $\sin^2 \beta = \frac{(\sqrt{3}u_1 - u_2)^2}{4(u_1^2 + u_2^2)}$	0,25	
• Ta có $\cos \varphi = \frac{ u_1 - \sqrt{3}u_2 }{2\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$	0,25	
$\Leftrightarrow \cos^2 \varphi = \frac{(u_1 - \sqrt{3}u_2)^2}{4(u_1^2 + u_2^2)}$	0,25	
Do đó $\sin^2 \varphi = \frac{(\sqrt{3}u_1 + u_2)^2}{4(u_1^2 + u_2^2)}$	0,25	
• Vậy $S = \frac{u_2^2(3u_1^2 - u_2^2)^2 + u_1^2(u_1^2 - 3u_2^2)^2}{16(u_1^2 + u_2^2)^3}$	0,5	
$= \frac{u_1^6 + 3u_1^4u_2^2 + 3u_1^2u_2^4 + u_2^6}{16(u_1^2 + u_2^2)^3}$	0,5	
$= \frac{1}{16}$	0,25	

--- Hết ---