

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS NĂM 2025

Môn thi: TOÁN - Bảng A

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi này có 01 trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho biểu thức $P = x^5 - 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 4x + 15$. Tính giá trị biểu thức P khi $x = \frac{-7}{\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$.

b) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 1$ và $a - \frac{1}{a} + b - \frac{1}{b} + c - \frac{1}{c} = 0$.

Chứng minh $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 - 3x + 2 = \sqrt{4x - 2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2y^2 - xy - x + 5y = 2 \\ 3x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $5x^2 + y^2 - 4xy - 2y + 1 = 0$.

b) Cho a, b, c là ba số nguyên thỏa mãn $6a^2 + 7b^2 = 15c^2$. Chứng minh abc chia hết cho 98.

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H .

a) Chứng minh $DH \cdot DA = DE \cdot DF$;

b) Tia FE cắt đường tròn (O) tại N . Chứng minh OA vuông góc với EF và AN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ECN ;

c) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và AH , IJ cắt EF tại P , AH cắt EF tại Q . Chứng minh $DFEI$ và $BQPC$ là các tứ giác nội tiếp.

Câu 5. (1,0 điểm)

Trên bảng viết 2024 số tự nhiên liên tiếp $1, 2, 3, \dots, 2023, 2024$. Người ta thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần xóa đi hai số a, b bất kỳ trên bảng rồi lại viết lên bảng số mới có giá trị $ab - a - b + 2$. Cứ tiếp tục làm như vậy cho đến khi trên bảng chỉ còn lại một số. Tìm số còn lại cuối cùng trên bảng.

-----Hết-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí của giám thị 1: Chữ kí của giám thị 2:

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH****HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP TỈNH THCS NĂM 2024-2025**

Môn thi: TOÁN - Bảng A

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Hướng dẫn này có 02 trang)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

1. Giám khảo chấm đúng theo hướng dẫn của Sở Giáo dục và Đào tạo.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM

Câu	Sơ lược lời giải/Một số gợi ý chính	Điểm
Câu 1 (4,0 điểm)	a) Có $x = \frac{-7}{\sqrt{9+4\sqrt{2}}} = \frac{-7}{1+2\sqrt{2}} = 1-2\sqrt{2}$	0,75
	Suy ra $x^2 - 2x - 7 = 0$	0,5
	Từ đó $P = (x^2 - 2x - 7)(x^3 - 2) + 1 = 1$	0,75
	b) $a - \frac{1}{a} + b - \frac{1}{b} + c - \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow a - bc + b - ca + c - ab = 0$	0,5
	$\Rightarrow a(1-c) + b(1-c) - (1-c) + abc - ab = 0$	0,75
	$\Rightarrow (1-c)(a+b-1-ab) = 0 \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1) = 0$	0,75
Câu 2 (4,0 điểm)	a) Xét phương trình $x^2 - 3x + 2 = \sqrt{4x-2}$, Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$	0,25
	$x^2 - 3x + 2 = \sqrt{4x-2} \Leftrightarrow x^2 - (4x-2) + x - \sqrt{4x-2} = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x - \sqrt{4x-2})(x + \sqrt{4x-2} + 1) = 0$	
	$\Leftrightarrow x - \sqrt{4x-2} = 0$ (1) hoặc $x + \sqrt{4x-2} + 1 = 0$ (2)	0,25
	Giải (1): $x - \sqrt{4x-2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = (\sqrt{2})^2$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-2)^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}; x = 2 - \sqrt{2}$ (đều thỏa mãn điều kiện)	0,25
	Giải (2): $x + \sqrt{4x-2} + 1 = 0$ (Vô nghiệm vì $x \geq \frac{1}{2}$ nên vế trái luôn dương)	0,25
	Vậy $S = \{2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$	0,25
	b) Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2y^2 - xy - x + 5y = 2 \\ 3x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y+1)(x+y-2) = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+1=0 \\ 3x^2-2y^2=1 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 3x^2-2y^2=1 \end{cases}$ (II)	0,5
	Giải (I) $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 3x^2-2y^2=1 \end{cases}$ ta được $(x; y) \in \left\{ (1; 1), \left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5} \right) \right\}$	0,5



	Giải (II) $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 3x^2-2y^2=1 \end{cases}$ ta được $(x;y) \in \{(1;1), (-9;11)\}$	0,5	
	Tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \left\{ (1;1), \left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right), (-9;11) \right\}$	0,25	
Câu 3 (4,0 điểm)	a) $5x^2 + y^2 - 4xy - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (2x-y+1)^2 = 4 = 0^2 + 2^2$	0,75	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ (2x-y+1)^2 = 4 \end{cases} \quad (1) \text{ hoặc } \begin{cases} (x-2)^2 = 4 \\ (2x-y+1)^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$	0,5	
	Giải (1) được $(2;3), (2;7)$, giải (2) được $(0;1), (4;9)$	0,5	
	Vậy $S = \{(2;3), (2;7), (0;1), (4;9)\}$	0,25	
	b) Nhận xét: Với x là số nguyên thì x^2 chia 7 chỉ dư 0, 1, 2, 4. Với y là số nguyên không chia hết cho 2 thì y^2 chia 4 dư 1	0,5	
	Trở lại bài toán: Giả thiết viết lại thành $7a^2 + 7b^2 = 14c^2 + (c^2 + a^2)$, suy ra $c^2 + a^2$ chia hết cho 7, xét mọi trường hợp về số dư của a^2 và c^2 khi chia cho 7 được a^2 và c^2 đều chia hết cho 7, suy ra cả a và c đều chia hết cho 7. (1)	0,5	
	Nếu cả ba số a, b, c đều không chia hết cho 2 thì theo nhận xét trên ta có $a^2 = 4m+1; b^2 = 4n+1; c^2 = 4p+1$, thay vào giả thiết ta được $6.4m + 7.4n - 15.4p = 2$, vô lí vì VT chia hết cho 4, còn VP không chia hết cho 4. Chứng tỏ trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số chia hết cho 2 (2)	0,75	
	Từ (1), (2) và chú ý $(2, 7) = 1 \Rightarrow abc$ chia hết cho 7.7.2 hay abc chia hết cho 98.	0,25	
Câu 4 (7,0 điểm)		a) Chứng minh được tứ giác BDHF nội tiếp, suy ra $HDF = HBF$	0,75
		Chứng minh tứ giác BDEA nội tiếp, suy ra $HDE = HBF$	0,75
		Từ đó $HDE = HDF$	0,25
		Chứng minh được tam giác EDH đồng dạng với tam giác ADF	0,5
		Suy ra $DH.DA = DE.DF$	0,25
	b) Vẽ tiếp tuyến Ax của (O) (Ax và AC cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AB) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp suy ra $AEF = ABC = CAx$		0,5
	Suy ra $Ax \parallel EF$, dẫn đến OA vuông góc với EF		0,5
	Nếu tia EF cắt (O) tại M thì A là điểm chính giữa cung MN		0,25
	Suy ra $NCA = NMA = MNA$		0,5
	Suy ra AN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ECN.		0,25
	c) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn tâm I		0,25
	Suy ra $EIF = 2EBF = 2HDF = EDF$, dẫn đến DFEI là tứ giác nội tiếp		0,75
	Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn tâm J, suy ra $IJ \perp EF$		0,5
	Gọi S là giao điểm của BC và EF. Chứng minh $SQ.SP = SD.SI = SE.SF = SB.SC$		0,75

	Từ đó suy ra tứ giác BQPC nội tiếp	0,25
Câu 5 (1,0 điểm)	Kí hiệu các số đã viết trên bảng là $a, b, c, d, e, \dots$	
	Đặt $M = ab - a - b + 2 = (a - 1)(b - 1) + 1 \Leftrightarrow M - 1 = (a - 1)(b - 1)$	
	Sau lần xoá thứ 1, các số còn lại trên bảng là $M, c, d, e, \dots$	0,25
	Sau lần xoá thứ 2, các số còn lại trên bảng là $(M - 1)(c - 1) + 1, d, e, \dots$. Hay viết lại là $(a - 1)(b - 1)(c - 1) + 1, d, e, \dots$	0,25
	Cứ như vậy, số cuối cùng còn lại trên bảng là $(1 - 1)(2 - 1)(3 - 1) \dots (2024 - 1) + 1 = 1$	0,5

-----Hết-----