



**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2024-2025**

Môn thi: Toán (chuyên)

(Dành cho thí sinh thi vào Trường THPT Chuyên Hạ Long)

*Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề
(Đề thi này có 01 trang)*

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + \sqrt{abc} = 4$. Tính giá trị biểu thức $Q = \sqrt{a(4-b)(4-c)} + \sqrt{b(4-c)(4-a)} + \sqrt{c(4-a)(4-b)} - \sqrt{abc}$.

b) Cho các số thực $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $a + b + c = 9$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $7x + 18 - 2\sqrt{x+1} - 8\sqrt{3x+4} = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + 2y = 10 \\ y^3 + 2y^2 + 6y - 20 = 8x^3 - 2x^2 + 2x \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Cho a, b, c là ba số nguyên khác không thỏa mãn $\frac{2025}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng abc chia hết cho 4.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) sao cho $p^2 - 3pq + 4q^2$ là một số chính phương.

Câu 4 (3,5 điểm). Qua điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Trên đoạn thẳng BC lấy điểm D bất kì (D khác B, D khác C). Đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường tròn (O) tại điểm E (E khác C), tia AE cắt đường tròn (O) tại điểm F (F khác E), hai đường thẳng AD và CF cắt nhau tại điểm G .

a) Chứng minh tứ giác $DEFG$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\frac{EA}{ED} = \frac{BA}{BD}$.

c) Chứng minh $GB = GF$.

d) Hai đường thẳng CE và AD cắt nhau tại điểm M , đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại điểm N . Chứng minh ba điểm N, D, F thẳng hàng.

Câu 5 (0,5 điểm). Viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 1975 lên bảng. Ta chọn hai số bất kì a, b trên bảng và xóa chúng đi, sau đó viết thêm số $|a - b|$ lên bảng. Thực hiện liên tiếp như vậy đến khi trên bảng chỉ còn một số, ta gọi số đó là c .

a) Số c có thể là 1945 hay không? Giải thích tại sao?

b) Số c có thể là 1954 hay không? Giải thích tại sao?

..... Hết



Website: _____

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí của cán bộ coi thi 1:..... Chữ kí của cán bộ coi thi 2:.....

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
Câu 1 2,0 điểm	a) Từ $a + b + c + \sqrt{abc} = 4 \Rightarrow 4 - b - c = a + \sqrt{abc}$	0,25
	Xét $a(4-b)(4-c) = a(16 - 4b - 4c + bc) = a[4(4-b-c) + bc]$ $= a[4(a + \sqrt{abc}) + bc] = 4a^2 + 4a\sqrt{abc} + abc = (2a + \sqrt{abc})^2$ $\Rightarrow \sqrt{a(4-b)(4-c)} = 2a + \sqrt{abc}$	0,5
	tương tự $\sqrt{b(4-c)(4-a)} = 2b + \sqrt{abc}$, $\sqrt{c(4-a)(4-b)} = 2c + \sqrt{abc}$ Vậy $Q = 2(a + b + c) + 3\sqrt{abc} - \sqrt{abc} = 2(a + b + c + \sqrt{abc}) = 8$	0,25
	b) Áp dụng bất đẳng thức Bunhia copxki dạng cộng mẫu ta có $P = \frac{1^2}{a+b} + \frac{1^2}{b+c} + \frac{1^2}{c+a} \geq \frac{(1+1+1)^2}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} = \frac{9}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$	0,25
	Dấu “=” khi $a = b = c = 3$. Vậy GTNN của P là $\frac{1}{2}$ khi $a = b = c = 3$	0,25
	Không mất tính tổng quát giả sử: $1 \leq a \leq b \leq c$, mà $a + b + c = 9 \Rightarrow 3 \leq c \leq 7$ Ta có $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a + b - 1$ $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{a+b+2c}{(a+c)(b+c)} = \frac{9+c}{ab+c(a+b)+c^2} \leq \frac{9+c}{a+b-1+c(a+b)+c^2}$ $= \frac{9+c}{9-c-1+c(9-c)+c^2} = \frac{9+c}{8c+8} \Rightarrow P \leq \frac{1}{9-c} + \frac{9+c}{8c+8}$	0,25
	Ta đi chứng minh: $P = \frac{1}{9-c} + \frac{9+c}{8c+8} \leq \frac{3}{4}$ (1) với mọi $3 \leq c \leq 7$ Thật vậy (1) $\Leftrightarrow c^2 - 8c + 7 \leq 0 \Leftrightarrow (c-7)(c-1) \leq 0$ (Đúng), dấu “=” khi $c = 7$, $a = b = 1$ Vậy GTLN của P là $\frac{3}{4}$ khi $c = 7, a = b = 1$	0,25
Câu 2 2,0 điểm	a) $7x + 18 - 2\sqrt{x+1} - 8\sqrt{3x+4} = 0$ (ĐK: $x \geq -1$)	0,25
	$7x + 18 - 2\sqrt{x+1} - 8\sqrt{3x+4} = 0(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 1)^2 + 2(\sqrt{3x+4} - 2)^2 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 \\ \sqrt{3x+4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.	0,25

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + 2y = 10 & (1) \\ y^3 + 2y^2 + 6y - 20 = 8x^3 - 2x^2 + 2x \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 2x + 4y = 20 & (2) \\ y^3 + 2y^2 + 6y - 20 = 8x^3 - 2x^2 + 2x & (3) \end{cases}$. Trừ vế với vế của (3) cho (2) $\Rightarrow y^3 + 2y = 8x^3 + 4x \Leftrightarrow (y - 2x)(y^2 + 2xy + 4x^2 + 2) = 0$	0,5
	Có $y^2 + 2xy + 4x^2 + 2 > 0$ nên $y = 2x$, thay vào (1) được $5x^2 + 5x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$ từ đó suy ra hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2)$ và $(-2; -4)$	0,5
	a) $\frac{2025}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow 2025bc = a(b + c)$	0,25
	Nếu b và c cùng lẻ $\Rightarrow$ Vế trái lẻ, vế phải chẵn (vô lý)	0,25
	Nếu b và c cùng chẵn $\Rightarrow abc$ chia hết cho 4	0,25
	Nếu b và c khác tính chẵn lẻ $\Rightarrow bc$ chẵn $\Rightarrow a(b + c)$ chẵn mà $b + c$ lẻ $\Rightarrow a$ chẵn $\Rightarrow abc$ chia hết cho 4.	0,25
	b) $p^2 - 3pq + 4q^2 = (p^2 + q^2) - 3(pq - q^2)$ Nếu cả p và q đều không chia hết cho 3 $\Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3}, q^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow p^2 - 3pq + 4q^2 = (p^2 + q^2) - 3(pq - q^2) \equiv 2 \pmod{3}$, vô lý vì $p^2 - 3pq + 4q^2$ chính phương. Vậy trong hai số p, q có 1 số chia hết cho 3, mà p, q nguyên tố nên $p = 3$ hoặc $q = 3$.	0,5
	Với $p = 3 \Rightarrow r^2 = 4q^2 - 9q + 9 (r \in \mathbb{N})$ $(2q - 3)^2 < r^2 < (2q - 1)^2 \Rightarrow 4q^2 - 9q + 9 = (2q - 2)^2 \Leftrightarrow q = 5$ (thỏa mãn)	0,25
Câu 3 2,0 điểm	Với $q = 3 \Rightarrow r^2 = p^2 - 9p + 36 > p^2 - 10p + 25 = (p - 5)^2$ (do $p > 0$) Với $p = 2$, ta có $r^2 = 2^2 - 9 \cdot 2 + 36 = 22$ (ktm) Với $p = 3$, ta có $r^2 = 3^2 - 9 \cdot 3 + 36 = 18$ (ktm) Với $p = 5$, ta có $r^2 = 5^2 - 9 \cdot 5 + 36 = 16$ (tm) Với $p = 7$, ta có $r^2 = 7^2 - 9 \cdot 7 + 36 = 22$ (ktm) Với p là số nguyên tố lớn hơn 7, ta có: $r^2 = p^2 - 9p + 36 < p^2 - 6p + 9 = (p - 3)^2$, nên $(p - 5)^2 < r^2 < (p - 3)^2$. Do đó $r^2 = (p - 4)^2$ Với $r^2 = (p - 4)^2 \Leftrightarrow p^2 - 9p + 36 = p^2 - 8p + 16 \Leftrightarrow p = 20$ (ktm) Vậy $\begin{cases} p = 3, q = 5 \\ p = 5, q = 3 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
Câu 4 3,5 điểm	a) $ACE = ADE$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O') cùng chắn AE)	0,25
	$ACE = CFE$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây của (O) cùng chắn CE) $\Rightarrow ADE = CFE$	0,5
	Tứ giác $DEFG$ có $ADE = GFE \Rightarrow$ tứ giác $DEFG$ nội tiếp	0,25
	b) $\triangle ABE$ và $\triangle AFB$ có A chung. $ABE = AFB$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây của (O) cùng chắn BE) $\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle AFB \Rightarrow \frac{EA}{BA} = \frac{BA}{FA}$	0,5
	Tứ giác $AEDC$ nội tiếp $(O') \Rightarrow EDB = EAC, EBC = EFC$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) cùng chắn CE) $\Rightarrow \triangle BED \sim \triangle FCA \Rightarrow \frac{ED}{BD} = \frac{AC}{AF}$	0,25
	AB, AC là hai tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AB = AC$, kết hợp với $\frac{EA}{BA} = \frac{BA}{FA}$ và $\frac{ED}{BD} = \frac{AC}{AF} \Rightarrow \frac{EA}{BA} = \frac{ED}{BD} \Rightarrow \frac{EA}{ED} = \frac{BA}{BD}$.	0,25
	c) $EAD = ECD$ (hai góc nội tiếp (O') cùng chắn DE), $ECB = EFB$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn BE) $\Rightarrow EAD = EFB \Rightarrow AG \parallel BF \Rightarrow AGC = BFC$ (hai góc đồng vị) và $AGB = FBG$ (so le trong)	0,5
	$ABC = BFC$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây của (O) cùng chắn BC), kết hợp với $AGC = BFC \Rightarrow ABC = AGC \Rightarrow$ tứ giác $ABGC$ nội tiếp	0,25
	Tứ giác $ABGC$ nội tiếp $\Rightarrow AGB = ACB$. Có $AB = AC \Rightarrow ABC = ACB$. Vậy $GBF = GFB \Rightarrow \triangle GBF$ cân $\Rightarrow GB = GF$.	0,25

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	d) Tứ giác $ABGC$ nội tiếp $\Rightarrow BAG = BCF$ mà $BCF = BNF$ (nội tiếp (O) cùng chắn BF) nên $BAD = BNF$ (1) $\triangle AEM$ và $\triangle CDM$ có $AME = CMD$ (đối đỉnh) và $EAM = DCM$ (nội tiếp (O') cùng chắn ED) $\Rightarrow \triangle AEM \sim \triangle CDM \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{ME}{MD}$ $\Rightarrow MA.MD = ME.MC$. $\triangle BEM$ và $\triangle CNM$ có $EMB = NMC$ (đối đỉnh) và $EBM = NCM$ (nội tiếp (O) cùng chắn EN) $\Rightarrow \triangle BEM \sim \triangle CNM \Rightarrow \frac{ME}{MN} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow ME.MC = MB.MN$ mà $MA.MD = ME.MC \Rightarrow MB.MN = MA.MD \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MN}$.	0,25
	$\triangle MBA$ và $\triangle MDN$ có $AMB = NMD$ (đối đỉnh) và $\frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MN} \Rightarrow$ $\triangle MBA \sim \triangle MDN \Rightarrow BAM = DNM$, kết hợp với (1) $\Rightarrow BND = BNF$ $\Rightarrow N, D, F$ thẳng hàng.	0,25
Câu 5 0,5 điểm	a) Từ 1 đến 1975 có $(1975 - 1) : 2 + 1 = 988$ (số lẻ) Xét các khả năng có thể xảy ra: Nếu a và b cùng lẻ, sau phép biến đổi ta xóa đi hai số lẻ và thêm vào bảng một số chẵn $\Rightarrow$ số số lẻ giảm đi 2 Nếu a và b cùng chẵn, sau phép biến đổi, ta xóa đi hai số chẵn và thêm vào bảng một số chẵn $\Rightarrow$ số số lẻ giữ nguyên Nếu a và b khác tính chẵn lẻ, sau phép biến đổi ta xóa đi một số chẵn, một số lẻ và thêm vào một số lẻ $\Rightarrow$ số số lẻ giữ nguyên Vậy sau mỗi lần biến đổi, số số lẻ còn lại luôn chia hết cho 2 nên số cuối cùng còn lại trên bảng không thể là số lẻ. Vậy số cuối cùng trên bảng không thể là 1945.	0,25
	Ta thực hiện các phép biến đổi đối với các cặp số sau: $(1;2);(3;4);...;$ $(1951;1952);(1953;1955);(1956;1957);...;(1972;1973);(1974;1975)$. Như vậy sau 987 phép biến đổi trên bảng còn 986 số 1, 1 số 2 và số 1954. Tiếp tục biến đổi cặp $(1;2)$ thì trên bảng còn 986 số 1 và số 1954. Các phép biến đổi tiếp theo với các cặp số $(1;1)$ thì sau 493 phép biến đổi trên bảng còn số 1954 và toàn số 0, tiếp tục thực hiện các phép biến đổi với cặp số bất kì thì số số 0 giảm dần và cuối cùng trên bảng còn số 1954.	0,25

Những chú ý khi chấm thi:

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới cho điểm tối đa.
2. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết.
3. Có thể chia nhỏ điểm thành phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm thống nhất toàn bài là tổng số điểm các bài đã chấm, **không làm tròn**.

.....**Hết**.....