

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ**

**KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2020 – 2021**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn : Toán (dành cho chuyên Tin)

Câu 1. (2 điểm)

a) Cho $0 < x < y$ thỏa mãn $2x^2 + 2y^2 = 5xy$. Tính $E = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

b) Cho $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$. Tính giá trị biểu thức $P = (2x^3 - 6x + 2008)^{2021}$

Câu 2. (2 điểm)

a) Phân tích số 210720202021 thành tổng của k số tự nhiên $a_1; a_2; \dots; a_k$.

Đặt $S = a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_k^5$. Tìm chữ số tận cùng của S

b) Cho X là một tập hợp gồm 506 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2020. Chứng minh trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{5; 10; 15\}$

Câu 3. (2 điểm)

a) Giải phương trình : $5x^2 + 6x + 4 = 3(x+1)\sqrt{3x^2 + 4}$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2 + y^2 + 2xy = 11y \\ y(2x + y)^2 = 2x^2 + 13y + 4 \end{cases}$$

Câu 4. (3 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC

a) Chứng minh bốn điểm M, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AB.BF + AC.CE \leq 4R^2$

c) Khi vị trí các đỉnh A, B, C thay đổi trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC luôn nhọn, chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF không đổi

Câu 5. (1 điểm) Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3xyz$.

Chứng minh :
$$\sqrt{\frac{x}{3y^2z^2 + xyz}} + \sqrt{\frac{y}{3x^2z^2 + xyz}} + \sqrt{\frac{z}{3x^2y^2 + xyz}} \leq \frac{3}{2}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Ta có:

$$2x^2 + 2y^2 = 5xy \Leftrightarrow 2x^2 - xy + 2y^2 - 4xy = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x - y) + 2y(y - 2x) = 0 \Leftrightarrow (2x - y)(x - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = y \text{ (do } 0 < x < y)$$

$$\text{Vậy } E = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{5x^2}{-3x^2} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{b) Từ } x = \frac{1}{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} + 3 - 2\sqrt{2} + 3x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x = 6 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 6 = 0$$

$$\text{Ta có: } 2x^3 - 6x + 2008 = 2(x^3 - 3x - 6) + 2020 = 2020$$

$$\text{Vậy } P = 2020^{2021}$$

Câu 2.

a) Với $n \in \mathbb{N}$ ta có: $(n^5 - n) \vdots 10$

$$\text{Thật vậy, } (n^5 - n) = (n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(n^5 - n) = [(n-1)n(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n^2-1)] \vdots 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (n^5 - n) \vdots 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (a_i^5 - a_i) \vdots 10, \quad (i = 1; 2; \dots; k)$$

$$\Rightarrow [(a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_k^5) - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)] \vdots 10 \Rightarrow (S - 210720202021) \vdots 10$$

Vậy S có số tận cùng là 1.

b) Ta chia các số nguyên từ 1 đến 2020 thành 101 nhóm

$$\{1; 2; \dots; 20\}; \{21; 22; \dots; 40\}; \dots; \{1981; 1982; \dots; 2000\}; \{2001; 2002; \dots; 2020\}$$

Vì có 506 số nguyên dương khác nhau nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một nhóm

$$\text{có chứa } \left\lceil \frac{506}{101} \right\rceil + 1 = 6 \text{ số trở lên}$$

Hiệu của hai số bất kỳ trong nhóm trên luôn lớn hơn 0, nhỏ hơn 20. Trong các số này có 2 số có cùng số dư khi chia cho 5, hiệu hai số này chia hết cho 5. Giả sử hai số này là $x, y (x > y)$

Từ đó ta có $x - y \in \{5; 10; 15\}$ ta được điều phải chứng minh.

Câu 3.**a) Giải phương trình** $5x^2 + 6x + 4 = 3(x+1)\sqrt{3x^2 + 4}$ Phương trình tương đương $3x^2 + 4 - 3(x+1)\sqrt{3x^2 + 4} + 2x^2 + 6x = 0$ Đặt $t = \sqrt{3x^2 + 4} \Rightarrow t^2 - 3(x+1)t + (2x^2 + 6x) = 0$ Ta có: $\Delta = 9(x+1)^2 - 4(2x^2 + 6x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. Do đó, $\begin{cases} t = 2x \\ t = x+3 \end{cases}$

$$*) t = 2x \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 4} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

$$*) t = x+3 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 4} = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ 2x^2 - 6x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 2; \frac{3 \pm \sqrt{19}}{2} \right\}$$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2 + y^2 + 2xy = 11y \\ y(2x+y)^2 = 2x^2 + 13y + 4 \end{cases}$$
+) Xét $y = 0$ (không thỏa mãn)+) Xét $y \neq 0$. Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x^2 + 2 + y^2 + 2xy = 11y \\ y(2x+y)^2 = 2(x^2 + 2) + 13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 2}{y} + 2x + y = 11 \\ (2x+y)^2 = \frac{2(x^2 + 2)}{y} + 13 \end{cases}$$

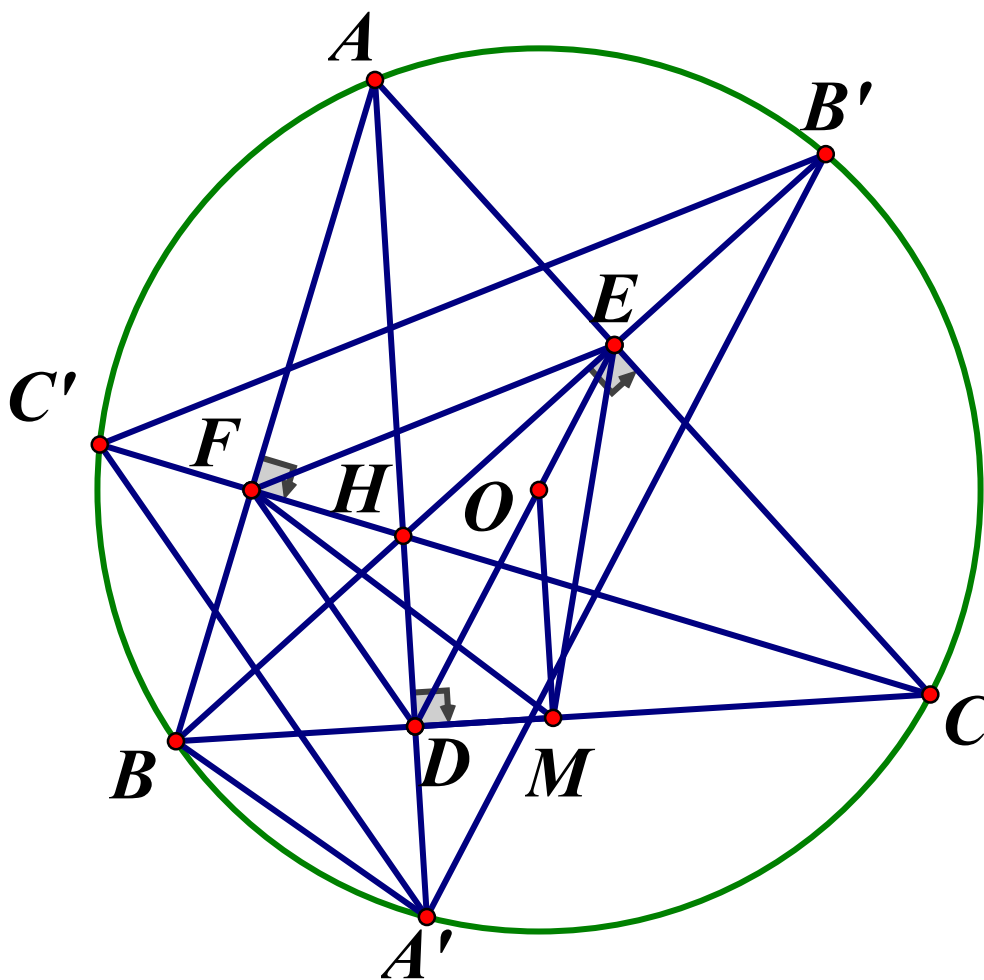
$$\text{Đặt } u = 2x + y; v = \frac{x^2 + 2}{y} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ u^2 - 2v = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases}; \begin{cases} u = -7 \\ v = 18 \end{cases}$$

$$*) \begin{cases} u=5 \\ v=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=5 \\ x^2+2=6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ x=-14 \\ y=33 \end{cases}$$

$$*) \begin{cases} u=-7 \\ v=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=-7 \\ x^2+2=18y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-7 \\ x^2+36x+128=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \\ x=-32 \\ y=57 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(2;1);(-4;1);(-14;33);(-32;57)$

Câu 4.



a) Chứng minh bốn điểm M, D, E, F cùng thuộc một đường tròn

Vì BE, CF là đường cao nên $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn tâm M đường kính BC

$$\Rightarrow \widehat{ECF} = \widehat{EBF} = \frac{1}{2} \widehat{EMF} \quad (1) \text{ (góc nội tiếp và góc ở tâm)}$$

Tứ giác $BDHF$ có $\widehat{BDH} + \widehat{BFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $BDHF$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{HBF} = \widehat{HDF} \quad (2)$$

Tương tự, tứ giác $CDHE$ nội tiếp được nên $\widehat{HCE} = \widehat{HDE} \quad (3)$

$$\text{Từ (1),(2),(3) ta có: } \widehat{EDF} = \widehat{EDH} + \widehat{HDF} = \widehat{ECF} + \widehat{EBF} = 2 \cdot \frac{1}{2} \widehat{EMF} = \widehat{EMF}$$

Từ $\widehat{EDF} = \widehat{EMF} \Rightarrow MDFE$ nội tiếp $\Rightarrow$ bốn điểm M, D, E, F cùng thuộc một đường tròn

b) Chứng minh $AB.BF + AC.CE \leq 4R^2$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CBF$ có: $\widehat{B}$ chung; $\widehat{ADB} = \widehat{CFB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle CBF (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BF} \Rightarrow AB.BF = BC.BD \quad (4)$$

$$\text{Tương tự } \triangle ACD \sim \triangle BCE (g.g) \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow AC.CE = BC.CD \quad (5)$$

$$\text{Cộng (4)(5) theo từng vế ta được } AB.BF + AC.CE = BC.(BD + DC) = BC^2$$

Vì $BC \leq 2R$ nên ta có: $AB.BF + AC.CE \leq 4R^2$

c) Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF không đổi

Gọi $A'; B'; C'$ lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AD, BE, CF với (O) .

Ta có $\widehat{A'BC} = \widehat{A'AC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $A'C$)

$$\widehat{EBC} = \widehat{A'AC} \text{ (Cùng phụ với } \widehat{ACB}) \Rightarrow \widehat{A'BC} = \widehat{EBC}$$

Tam giác HBA' có $BD \perp HA'$; $\widehat{A'BC} = \widehat{EBC}$ nên cân tại $B \Rightarrow BD$ là đường trung trực của $HA' \Rightarrow D$ là trung điểm của HA'

Tương tự có E, F là trung điểm của HB', HC'

Suy ra $\triangle DEF \sim \triangle A'B'C'$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF ta có:

$$\frac{r}{R} = \frac{DE}{A'B'} = k = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2} R \text{ không đổi khi } A, B, C \text{ thay đổi trên đường tròn } (O)$$

Câu 5.

$$\text{Từ giả thiết } xy + yz + zx = 3xyz \text{ ta có: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$$

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$. Ta có : $a, b, c > 0; a + b + c = 3$

Ta phải chứng minh $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3a+bc}} \leq \frac{3}{2}$

Thật vậy: Thay $a + b + c = 3$, $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b+c)a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số $\frac{1}{a+b}; \frac{1}{a+c}$ ta được:

$$\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right)$$

Tương tự : $\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} \leq \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c} \right); \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right)$

Cộng vế với vế và biến đổi $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}} \leq \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ hay $x = y = z = 1$